

北一女中 107 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 三年溫班 座號： 12 號 姓名： 張育瑾

題號： 5-4 頁碼/總頁數： 3/4 (如果一題只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

$$a_n = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$a_2 = \frac{1(2^2+2+1)}{3(2^2-2+1)}$$

$$a_3 = \frac{2}{4} \frac{(3^2+3+1)}{(3^2-3+1)} = \frac{2}{4} \frac{(3^2+3+1)}{(2^2+2+1)}$$

$$a_4 = \frac{3}{5} \frac{(4^2+4+1)}{(4^2-4+1)} = \frac{3}{5} \frac{(4^2+4+1)}{(3^2+3+1)}$$

$$\vdots$$

$$a_{2019} = \frac{2018}{2020} \frac{(2019^2+2019+1)}{(2019^2-2019+1)} = \frac{2018}{2020} \frac{(2019^2+2019+1)}{(2018^2+2018+1)}$$

$$\therefore a_2 \times a_3 \times a_4 \dots \times a_{2019}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{2017}{2019} \times \frac{2018}{2020} \right) \left(\frac{2^2+2+1}{2^2-2+1} \times \frac{3^2+3+1}{2^2+2+1} \times \frac{4^2+4+1}{3^2+3+1} \times \dots \times \frac{2019^2+2019+1}{2018^2+2018+1} \right)$$

$$= \frac{1 \times 2}{2019 \times 2020} \times \frac{2019^2 + 2019 + 1}{(2^2 - 2 + 1)}$$

$$= \frac{2 \times (2019^2 + 2019 + 1)}{2019 \times 2020 \times 3}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2019(2019+1)+1}{2019 \times 2020}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{(2019 \times 2020) + 1}{(2019 \times 2020)}$$

$$\therefore \frac{(2019 \times 2020) + 1}{(2019 \times 2020)} > 1 \quad \therefore a_2 \times a_3 \times a_4 \dots \times a_{2019} > \frac{2}{3} \text{ 得證 } \ast$$

observe:

$$(n+1)^2 - (n+1) + 1$$

$$= n^2 + 2n + 1 - n - 1$$

$$= n^2 + n + 1$$

$$\text{即 } 3^2 - 3 + 1 = 2^2 + 2 + 1$$

$$4^2 - 4 + 1 = 3^2 + 3 + 1$$

⋮

$$2019^2 - 2019 + 1 = 2018^2 + 2018 + 1$$