北一女中 108 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二年良班　座號：03、08號　姓名：任涵聿、李晏甄

題號：1-1　頁碼／總頁數：＿＿（如果一題只有一頁，可不填）

（請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。）

10

$x, y, z > 0$，$x > z$ 且 $y > z$

令 $x = z + \alpha$
$y = z + \beta$　$(\alpha, \beta > 0)$

試證 $\sqrt{z(x-z)} + \sqrt{z(y-z)} \le \sqrt{xy}$

$\Rightarrow \sqrt{z(z+\alpha-z)} + \sqrt{z(z+\beta-z)} \le \sqrt{(z+\alpha)(z+\beta)}$

$\Rightarrow (\sqrt{z\alpha} + \sqrt{z\beta})^2 \le (\sqrt{(z+\alpha)(z+\beta)})^2$

$\Rightarrow z\alpha + z\beta + 2z\sqrt{\alpha\beta} \le z^2 + (\alpha+\beta)z + \alpha\beta$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)z + 2z\sqrt{\alpha\beta} \le z^2 + (\alpha+\beta)z + \alpha\beta$

$\Rightarrow 2z\sqrt{\alpha\beta} \le z^2 + \alpha\beta$

$\because \alpha, \beta, z > 0$

$\therefore$ 根據算幾不等式，$\dfrac{z^2+\alpha\beta}{2} \ge \sqrt{z^2\alpha\beta}$

$\Rightarrow z^2 + \alpha\beta \ge 2z\sqrt{\alpha\beta}$

故得證