北一女中 108 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第三期解答：

3-1　若 $a+b+c=0$ 且 $\dfrac{b^2}{2a+b}+\dfrac{c^2}{2b+c}+\dfrac{a^2}{2c+a}=2020$ ，

試求 $\dfrac{a^2}{2a+b}+\dfrac{b^2}{2b+c}+\dfrac{c^2}{2c+a}$ 之值。

答： $S=505$ 。

解：

令 $S=\dfrac{a^2}{2a+b}+\dfrac{b^2}{2b+c}+\dfrac{c^2}{2c+a}$ ，

則 $4S-(\dfrac{b^2}{2a+b}+\dfrac{c^2}{2b+c}+\dfrac{a^2}{2c+a})=\dfrac{4a^2-b^2}{2a+b}+\dfrac{4b^2-c^2}{2b+c}+\dfrac{4c^2-a^2}{2c+a}$

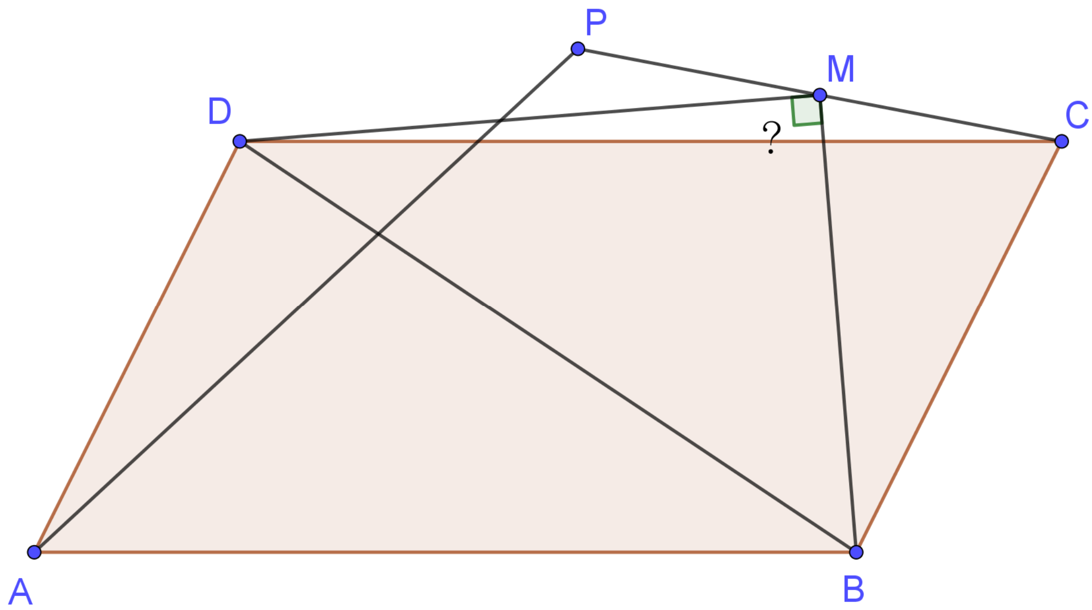
$=(2a-b)+(2b-c)+(2c-a)$

$=a+b+c=0$ ，

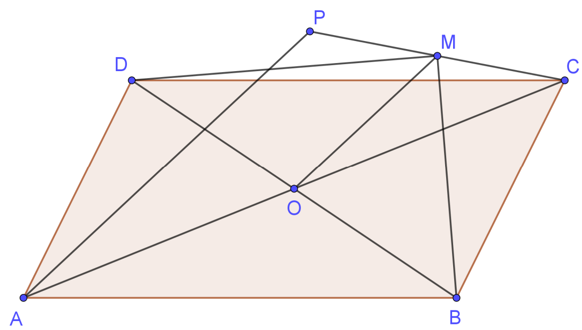
所以 $4S-2020=0 \Rightarrow S=505$ 。

3-2　已知 $ABCD$ 為平行四邊形。P 為平面上一點，滿足 $\overline{AP}=\overline{BD}$。

取 $\overline{CP}$ 中點為 M，請證明：$\angle BMD=90°$。



解：



連接 $\overline{AC}$，令 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點為 O。

連接 $\overline{OM}$。

因為 $ABCD$ 為平行四邊形，

所以對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相平分，故 $\overline{OB}=\overline{OD}$、$\overline{OA}=\overline{OC}$。

因為 O、M 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{CP}$ 中點，所以 $\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{AP}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\overline{OB}=\overline{OD}$，

故 O 為 $\triangle MBD$ 的外心。

因為 $\triangle MBD$ 的外心 O 在其邊 $\overline{BD}$ 上，

所以 $\triangle MBD$ 為直角三角形，且 $\angle BMD=90°$，證畢。

3-3 <u>小綠</u>將$1,2,3,\cdots\cdots,8$分別標示在一個正立方體的八個頂點。請證明：不論<u>小綠</u>標示的選擇為何，此正立方體一定有兩條相異的邊 a 與 b，使得「a 兩端的數字和」與「b 兩端的數字和」相等。

解：

反證法，假設正立方體任意兩條邊 a 與 b 的兩端數字和均相異。

因為$1+2\leq$某邊兩端數字和$\leq 7+8$，即$3\leq$某邊兩端數字和≤ 15。
因為正立方體有 12 條邊，而$3,4,5,\cdots\cdots,15$有 13 個數值，
所以 12 條邊的兩端數字和必定是$3,4,5,\cdots\cdots,15$之中的 12 個，只缺了其中一個。

如果缺的數值是 3,4,5,6 之一，考慮標示 8 的頂點，
因為某邊的兩端數字和為 15，所以標示 8 與標示 7 的頂點必相鄰（有邊連接）；
因為某邊的兩端數字和為 14，所以標示 8 與標示 6 的頂點必相鄰；
因為某邊的兩端數字和為 13，且標示 7 與標示 6 的頂點不相鄰，
所以標示 8 與標示 5 的頂點必相鄰；
但如此一來，標示 7 與標示 5 的頂點不相鄰，
就沒有任一邊的兩端數字和為 12，矛盾。

如果缺的數值不是 3,4,5,6 之一，考慮標示 1 的頂點，
因為某邊的兩端數字和為 3，所以標示 1 與標示 2 的頂點必相鄰；
因為某邊的兩端數字和為 4，所以標示 1 與標示 3 的頂點必相鄰；
因為某邊的兩端數字和為 5，且標示 2 與標示 3 的頂點不相鄰，
所以標示 1 與標示 4 的頂點必相鄰；
但如此一來，標示 2 與標示 4 的頂點不相鄰，
就沒有任一邊的兩端數字和為 6，矛盾。

故最開始的假設是錯誤的，亦即此正立方體一定有兩條相異的邊 a 與 b，
使得「a 兩端的數字和」與「b 兩端的數字和」相等，證畢。

3-4 綠園有 10 名女孩，他們每人都有 100 顆巧克力糖。他們開始進行下述的分享糖果活動：每一次分享，都是由某個女孩將他擁有的巧克力糖分給其他 9 人每個 1 顆。(當然，必須有 9 顆以上巧克力糖的人才能當分享者。) 如果經過 n 次分享後，10 人所擁有的巧克力糖數目都不相同，試求 n 的最小值。

答：45。

解：

假設這 10 名女孩的分享次數依序為 $n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots, n_{10}$ ，

則第 k 位女孩分享出 $9n_k$ 顆糖，

但從其他女孩處得到 $n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_{k-1} + n_{k+1} + \cdots\cdots + n_{10}$ 顆糖，

所以經過 n 次分享後，第 k 位女孩擁有的巧克力糖數目為

$$100 - 9n_k + (n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_{k-1} + n_{k+1} + \cdots\cdots + n_{10})$$

$$= 100 + (n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_{10}) - 10n_k \text{ 。}$$

因為 10 位女孩所擁有的巧克力糖數目都不相同，

所以 $n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots, n_{10}$ 兩兩互異，

故 $n = n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_{10} \geq 0 + 1 + 2 + \cdots\cdots + 9 = 45$ 。

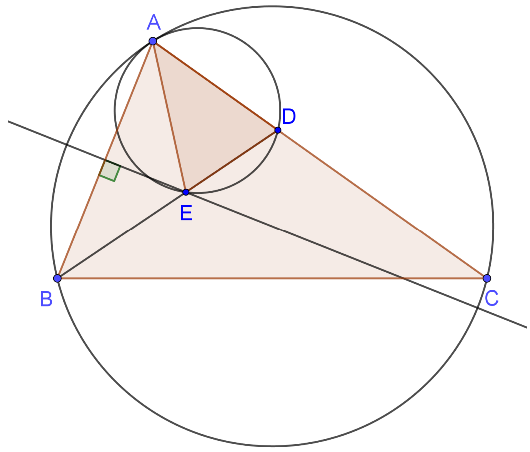
且當 $n_k = k - 1$ 時，

這 10 位女孩的巧克力糖數目依序為 $145, 135, 125, \cdots\cdots, 55$ 都不相同，滿足題意，

故 n 的最小值為 45。

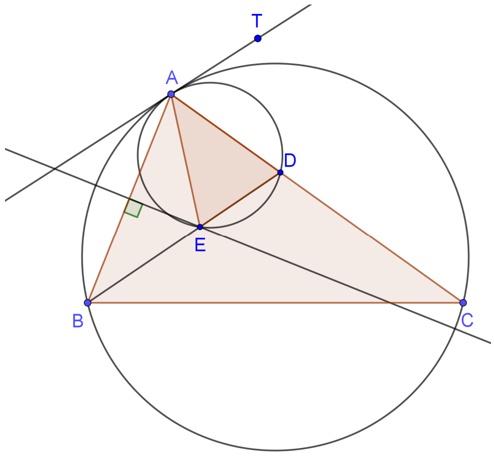
3-5　$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 的平分線交 $\overline{AC}$ 於點 D，且 $\overline{AB}$ 的中垂線與 $\overline{BD}$ 交於點 E。

作$\triangle ABC$ 與$\triangle ADE$ 的外接圓，請證明：這兩個外接圓相切。



解：

如右圖，過 A 點作$\triangle ABC$ 的外接圓的切線，並取切線上一點為 T。



因為 $\overline{BD}$ 平分 $\angle B$，

所以 $\angle EBA=\dfrac{1}{2}\angle B$ 。

又 E 是 $\overline{AB}$ 的中垂線上一點，

所以 $\overline{EA}=\overline{EB}\Rightarrow \angle EAB=\angle EBA=\dfrac{1}{2}\angle B$ ，

故 $\angle AED=\angle EAB+\angle EBA=\dfrac{1}{2}\angle B+\dfrac{1}{2}\angle B=\angle B$ 。

於是 $\angle TAD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$（弦切角）

$=\angle B$（圓周角）

$=\angle AED=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$（圓周角），

因為 $\angle TAD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$，所以直線 AT 也是$\triangle ADE$ 的外接圓的切線。

因為$\triangle ABC$ 外接圓與$\triangle ADE$ 外接圓過 A 點的切線是同一條，所以此兩圓相切，證畢。

3-6 給定兩個正整數a,b，如果有無窮多個正整數n使得a^n+b^n整除$a^{n+1}+b^{n+1}$，請證明必有$a=b$。

解：

反證法，若$a\neq b$。

由對稱性，不妨假設$a>b$。

如果$a^n+b^n \mid a^{n+1}+b^{n+1}$，

則$a^n+b^n \mid a(a^n+b^n)-(a^{n+1}+b^{n+1}) \Rightarrow a^n+b^n \mid (a-b)\cdot b^n$。

因為$(a-b)\cdot b^n$是正整數，而且是a^n+b^n的倍數，

所以$a^n+b^n \le (a-b)\cdot b^n \Rightarrow (\frac{a}{b})^n+1\le a-b \Rightarrow (\frac{a}{b})^n \le a-b-1$。

由題目條件可知有無窮多個正整數n使得a^n+b^n整除$a^{n+1}+b^{n+1}$，

所以有無窮多個正整數n使得$(\frac{a}{b})^n \le a-b-1$，

但$(\frac{a}{b})^n$是底數大於 1 的指數函數，

當n夠大時，$(\frac{a}{b})^n$一定會超過$a-b-1$，矛盾。

同理可知$a<b$時亦有矛盾，故必有$a=b$，證畢。