北一女中 108 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第二期解答：

2-1 已知有一個正整數 n，其前四位數字依序為 2,0,1,9，且 n 是 2020 的倍數。試求 n 的最小值。

【註：例如 31415926 的前四位數字依序為 3,1,4,1。】

答：20191920。

解：

因為 n 的前四位數字是 2,0,1,9，

所以可令 $n = 2019\times 10^m + a$，其中 a、m 為非負整數且 $0 \le a < 10^m$。

因為 $2020 \mid n$ 且 $2020 \mid 2020\times 10^m$，

所以 $2020 \mid (2020\times 10^m - n) \Rightarrow 2020 \mid (10^m - a)$

$\Rightarrow 2020 \le 10^m - a \le 10^m \Rightarrow m \ge 4$。

考慮 $m = 4$ 時，由於 $2020 \mid (10^4 - a)$，

所以 $10^4 - a = 2020, 4040, 6060, 8080$，

當 $10^4 - a = 8080$ 時，$a = 1920$ 最小，

故滿足題意的最小 n 值為 20191920，

2-2 小綠將 2019 個實數排成一列，他發現：任意連續兩數之和均為負數，但這 2019 個實數的總和卻是正數。如果這 2019 個實數中有 n 個正數，試求所有可能的 n 值。

答：1010。

解：

假設這 2019 個實數依序為 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{2019}$。

考慮此數列的奇數項 a_{2k-1}：

因為 $a_1 + a_2 < 0$、$a_3 + a_4 < 0$、……、$a_{2k-3} + a_{2k-2} < 0$，

且 $a_{2k} + a_{2k+1} < 0$、$a_{2k+2} + a_{2k+3} < 0$、……、$a_{2018} + a_{2019} < 0$，

但 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{2019} > 0$，所以必有 $a_{2k-1} > 0$，亦即所有的奇數項都是正數。

因為 $a_{2k-1} + a_{2k} < 0$，且 $a_{2k-1} > 0$，

所以必有 $a_{2k} < 0$，亦即所有的偶數項都是負數。

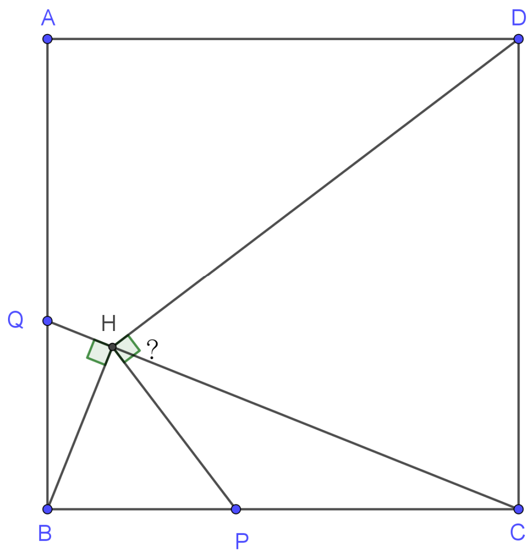
故這 2019 個實數中，恰有 1010 個正數，這是唯一可能的 n 值。

2-3　已知 $ABCD$ 為正方形，分別在 $\overline{BC}$ 、$\overline{BA}$ 上各取一點 P、Q，使得 $\overline{BP}=\overline{BQ}$ 。

連接 $\overline{CQ}$ ，過 B 點作 $\overline{CQ}$ 的垂線，

令垂足為 H，連接 $\overline{HP}$ 、$\overline{HD}$ 。

請證明：$\angle PHD=90°$ 。



答：

解：

因為 $\angle HBQ=90°-\angle HBC=\angle HCB$ ，

且 $\angle BHQ=90°=\angle CHB$ ，

所以$\triangle HBQ\sim\triangle HCB$（AA 相似）

$\Rightarrow \dfrac{\overline{HB}}{\overline{BQ}}=\dfrac{\overline{HC}}{\overline{CB}}$ 。

因為 $\dfrac{\overline{HB}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{HB}}{\overline{BQ}}=\dfrac{\overline{HC}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{HC}}{\overline{CD}}$ ，

且 $\angle HBP=90°-\angle HBQ=\angle BQH=90°-\angle BCQ=\angle HCD$ ，

所以$\triangle HBP\sim\triangle HCD$（SAS 相似）$\Rightarrow \angle BHP=\angle CHD$ ，

故 $\angle PHD=\angle PHC+\angle CHD=\angle PHC+\angle BHP=\angle BHC=90°$ ，證畢。

2-4 試求方程組$\begin{cases} x+y+z+w=5 \\ xy+yz+zw+wx=4 \\ xyz+yzw+zwx+wxy=3 \\ xyzw=-1 \end{cases}$之實數解。

答：$(x,y,z,w)=(\frac{1+\sqrt{2}}{2},2,\frac{1-\sqrt{2}}{2},2)$、$(\frac{1+\sqrt{2}}{2},2,\frac{1-\sqrt{2}}{2},2)$、

$(\frac{1-\sqrt{2}}{2},2,\frac{1+\sqrt{2}}{2},2)$、$(2,\frac{1-\sqrt{2}}{2},2,\frac{1+\sqrt{2}}{2})$ 共有 4 組解。

解：

令$\alpha=x+z$、$\beta=y+w$，

所以$\alpha+\beta=x+y+z+w=5$，

且$\alpha\beta=(x+z)(y+w)=xy+yz+zw+wx=4$，

故α,β為方程式$t^2-5t+4=0$的兩根，即 1 與 4。

Case 1. 若$\alpha=x+z=1$、$\beta=y+w=4$。

$3=xyz+yzw+zwx+wxy=(x+z)yw+(y+w)xz=yw+4xz$，

且$yw\cdot 4xz=4xyzw=-4$，

所以$yw,4xz$為方程式$t^2-3t-4=0$的兩根，即-1與 4。

Case 1-1. 若$yw=-1$、$4xz=4$。

又因為$y+w=4$，所以y,w為$t^2-4t-1=0$的兩根，即$2\pm\sqrt{5}$。

而$x+z=1$、$xz=1$，所以x,z為$t^2-t+1=0$的兩根，但此方程式無實根，不合。

Case 1-2. 若$yw=4$、$4xz=-1$。

又因為$y+w=4$，所以y,w為$t^2-4t+4=0$的兩根，即$2,2$。

而$x+z=1$、$xz=-\frac{1}{4}$，所以x,z為$t^2-t-\frac{1}{4}=0$的兩根，即$\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$。

所以$(x,y,z,w)=(\frac{1+\sqrt{2}}{2},2,\frac{1-\sqrt{2}}{2},2)$或$(\frac{1-\sqrt{2}}{2},2,\frac{1+\sqrt{2}}{2},2)$均為解。

Case 2. 若$\alpha=x+z=4$、$\beta=y+w=1$。

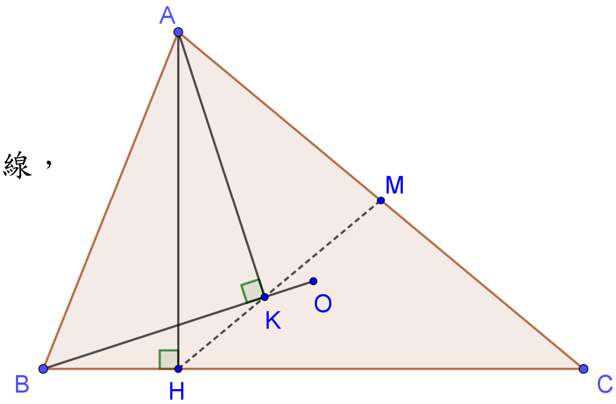
同 Case 1.的討論方法可知

$(x,y,z,w)=(2,\frac{1+\sqrt{2}}{2},2,\frac{1-\sqrt{2}}{2})$或$(2,\frac{1-\sqrt{2}}{2},2,\frac{1+\sqrt{2}}{2})$均為解。

2-5　如右圖，已知$\triangle ABC$的外心為O。

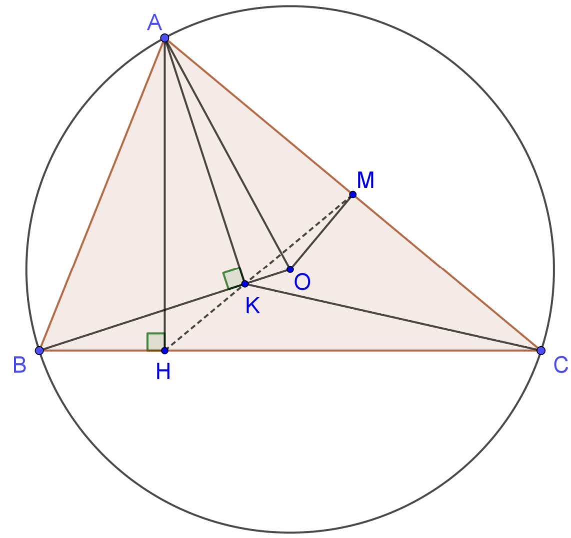
取$\overline{AC}$的中點為M，

再過A點分別對直線BC、直線BO作垂線，
垂足分別為H、K。
請證明：H、K、M三點共線。



解：
作$\triangle ABC$的外接圓，

連接$\overline{OC}$、$\overline{OM}$、$\overline{OA}$。



因為$\angle AHB = \angle AKB = 90^\circ$，
所以A、B、H、K四點共圓
$\Rightarrow \angle BKH = \angle BAH = 90^\circ - \angle B$。

因為O是$\triangle ABC$的外心，

且M為$\overline{AC}$的中點，

所以$\overline{OM}$垂直平分$\overline{AC}$，

於是$\angle OMA = 90^\circ = \angle OKA$，
所以O、K、A、M四點共圓
$\Rightarrow \angle OKM = \angle OAM = 90^\circ - \angle AOM = 90^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = 90^\circ - \angle B = \angle BKH$，

故H、K、M三點共線，證畢。

2-6 小綠有編號 1,2,3,……, 2019 的牌各一張，他將這些牌依照編號的順序圍成一圈。一開始，這些牌都是背面朝上的。

接著小綠開始進行下述的操作：

將 1 號牌翻面；

跳過 1 張牌後，將下一張牌（即 3 號牌）翻面；

跳過 2 張牌後，將下一張牌（即 6 號牌）翻面；

跳過 3 張牌後，將下一張牌翻面；

⋮

⋮

跳過 2018 張牌後，將下一張牌翻面。

請問：小綠做完上述操作後（總共翻了 2019 次牌），

有哪些編號的牌是正面朝上的？

答：757 號。

解：

假設第 k 次翻面的牌，是從 1 號開始數的第 a_k 張牌，

由題目所述可知 $a_k = 1+2+\cdots\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ 。

考慮第 k 次與第 $2018-k$ 次翻面的牌（其中 $1 \le k \le 1008$）：

$$a_{2018-k} - a_k = \frac{(2018-k)(2019-k)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(2018\times 2019 - 4037k + k^2) - (k^2 + k)}{2} = 2019\cdot(1009-k)$$ 為 2019 的倍數，

所以這兩次翻面的牌是同一張。

故只需再考慮第 1009、2018、2019 次翻面的牌：

$$a_{1009} = \frac{1009\times 1010}{2} = \frac{2018\times 505}{2} = \frac{(2019-1)\times 504 + 2018}{2} = 2019\times 252 + 757$$ ，

所以第 1009 次翻面的牌是 757 號。

$$a_{2018} = \frac{2018\times 2019}{2} = 2019\times 1009$$ 為 2019 的倍數，

所以第 2018 次翻面的牌是 2019 號。

$$a_{2019} = \frac{2019\times 2020}{2} = 2019\times 1010$$ 為 2019 的倍數，

所以第 2019 次翻面的牌是 2019 號。

綜合以上可知，只有 757 號牌被翻面了奇數次，

所以只有 757 號牌是正面朝上的。