北一女中 108 學年度上學期《數戰數決》有獎徵答活動

第一期解答：

1-1　已知三正數 x, y, z 滿足 $x>z$ 且 $y>z$，請證明：$\sqrt{z(x-z)}+\sqrt{z(y-z)}\le\sqrt{xy}$ 。

解：

令 $a=x-z$ 、 $b=y-z$ ，則 $a>0$ 且 $b>0$ 。

$\sqrt{z(x-z)}+\sqrt{z(y-z)}\le\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \sqrt{za}+\sqrt{zb}\le\sqrt{(z+a)(z+b)}$

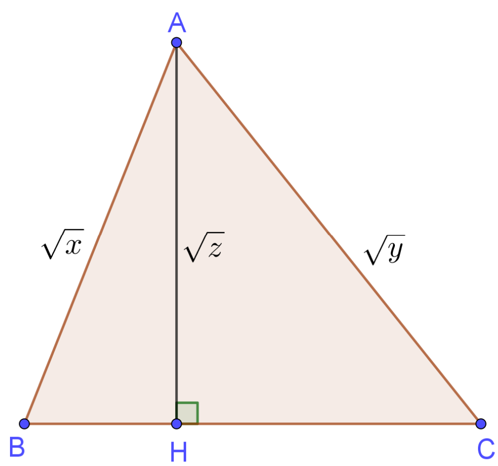
$\underset{\text{兩邊平方}}{\Leftrightarrow} za+2z\sqrt{ab}+zb\le z^2+za+zb+ab$

$\Leftrightarrow 2z\sqrt{ab}\le z^2+ab$

$\Leftrightarrow \dfrac{z^2+ab}{2}\ge z\sqrt{ab}$ ，最後的不等式由算幾不等式可知必成立，證畢。

另解：

構造圖形如右。



則 $\overline{BH}=\sqrt{x-z}$ 、 $\overline{CH}=\sqrt{y-z}$ ，

所以

$\triangle ABH$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{z(x-z)}$ ；

$\triangle ACH$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{z(y-z)}$ 。

又，$\overline{AB}$ 邊上的高 $\le\overline{AC}=\sqrt{y}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AB}$ 邊上的高 $\le\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{z(x-z)}+\dfrac{1}{2}\sqrt{z(y-z)}\le\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$

$\Rightarrow \sqrt{z(x-z)}+\sqrt{z(y-z)}\le\sqrt{xy}$ ，證畢。

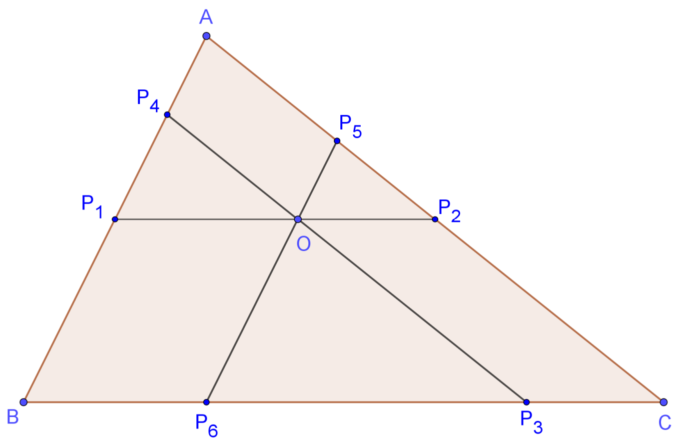
1-2 如下圖，O 為$\triangle ABC$ 內部一點。

過 O 點作 $\overline{BC}$ 的平行線交 $\overline{AB}$ 於點 P_1、交 $\overline{CA}$ 於點 P_2；

過 O 點作 $\overline{CA}$ 的平行線交 $\overline{BC}$ 於點 P_3、交 $\overline{AB}$ 於點 P_4；

過 O 點作 $\overline{AB}$ 的平行線交 $\overline{CA}$ 於點 P_5、交 $\overline{BC}$ 於點 P_6；

請證明：$\overline{OP_1}\times\overline{OP_3}\times\overline{OP_5}=\overline{OP_2}\times\overline{OP_4}\times\overline{OP_6}$。



解：

因為 $\overline{P_1P_2}\,//\,\overline{BC}$，所以 $\angle P_4P_1O=\angle B$；

同理亦可證明 $\angle P_1P_4O=\angle A$，故$\triangle P_4P_1O\sim\triangle ABC$（AA 相似）。

同理可得$\triangle OP_6P_3\sim\triangle ABC$ 且$\triangle P_5OP_2\sim\triangle ABC$，
故$\triangle P_4P_1O\sim\triangle OP_6P_3\sim\triangle P_5OP_2\sim\triangle ABC$，

所以 $\dfrac{\overline{OP_4}}{\overline{OP_1}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$、$\dfrac{\overline{OP_6}}{\overline{OP_3}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$、$\dfrac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_5}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$，

三式相乘可得 $\dfrac{\overline{OP_4}}{\overline{OP_1}}\times\dfrac{\overline{OP_6}}{\overline{OP_3}}\times\dfrac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_5}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\times\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\times\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}}=1$

$\Rightarrow\overline{OP_1}\times\overline{OP_3}\times\overline{OP_5}=\overline{OP_2}\times\overline{OP_4}\times\overline{OP_6}$，證畢。

1-3 已知 $x>y>0$ ，試解方程組 $\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=134 \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=126 \end{cases}$ 。

答：$(x,y)=(\dfrac{81}{4},\dfrac{49}{4})$ 。

解：

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3=(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})+3(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})=134+3\times 126=512$$

$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=8$ 。

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x-y)=(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})-(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})=134-126=8$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=8$$

$\Rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot 8=8 \Rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=1$ ，

又因為 $x>y>0$ ，所以 $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$ 。

由 $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \end{cases}$ 可解得 $(\sqrt{x},\sqrt{y})=(\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2})$ ，故 $(x,y)=(\dfrac{81}{4},\dfrac{49}{4})$ 。

1-4 對於正整數 N，若 N 的每一位數字都是奇數，則 N 被稱為「小綠數」。
例如：375 是小綠數、2019 不是小綠數。
試求出所有正整數 n，使得 n^2 是小綠數。

答：1 與 3。

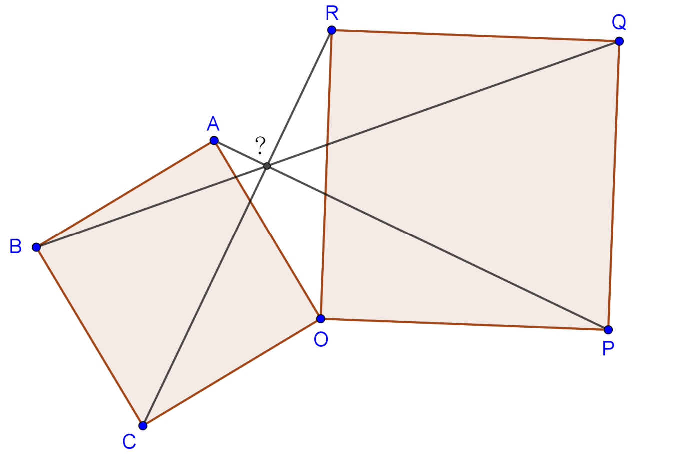
解：

因為小綠數的個位數字是奇數，所以 n^2 是奇數，故 n 也是奇數。
當 $n=1$ 時，$n^2=1$ 為小綠數。
當 $n=3$ 時，$n^2=9$ 為小綠數。

當 $n\geq 5$ 時，n^2 至少是二位數，故必有十位數字。
若 $n=10k\pm 1$ ，則 $n^2=100k\pm 20k+1$ ，其十位數字為偶數，故 n^2 不是小綠數；
若 $n=10k\pm 3$ ，則 $n^2=100k\pm 60k+9$ ，其十位數字為偶數，故 n^2 不是小綠數；
若 $n=10k+5$ ，則 $n^2=100k+100k+25$ ，其十位數字為 2，故 n^2 不是小綠數；
所以當 $n\geq 5$ 時，n^2 都不是小綠數。

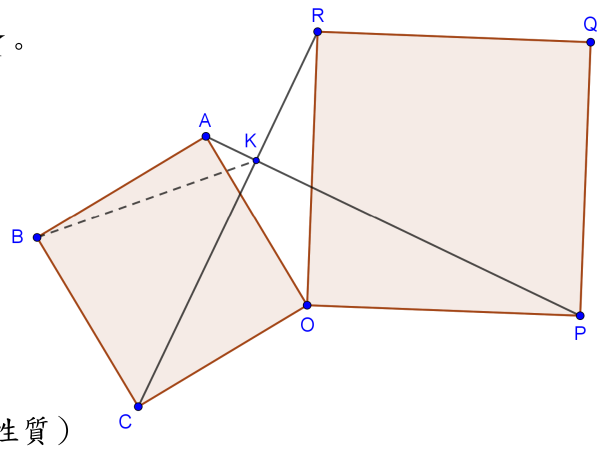
由上面的論述可知，滿足題意的 n 值只有 1 與 3。

1-5　如下圖，已知平面上兩正方形有一共同頂點 O，
其中一正方形的四頂點依逆時針方向的順序為 O、A、B、C，
而另一正方形的四頂點依逆時針方向的順序為 O、P、Q、R，
連接直線 AP、直線 BQ、直線 CR。
請證明：此三直線 AP、BQ、CR 共點。



解：
令直線 AP 與直線 CR 的交點為 K。

連接 $\overline{BK}$ 。



考慮$\triangle OAP$ 與$\triangle OCR$，

因為 $\overline{OA}=\overline{OC}$ 、 $\overline{OP}=\overline{OR}$ ，

$\angle AOP=\angle AOR+90°=\angle COR$ ，
所以$\triangle OAP\cong\triangle OCR$（SAS 全等性質）
$\Rightarrow \angle OAP=\angle OCR\Rightarrow O$、$K$、$A$、$C$ 四點共圓，
又因為 $OABC$ 為正方形，所以 O、A、B、C 也四點共圓，
故 O、K、A、B、C 五點共圓 $\Rightarrow \angle AKB=\angle AOB=45°$ 。

同理可證明 $\Rightarrow \angle PKQ=\angle PRQ=45°$ ，
所以 $\angle AKB=\angle PKQ$ ，故 B、K、Q 三點共線，亦即 K 也在直線 BQ 上，
於是三直線 AP、BQ、CR 共點 K，證畢。

1-6 小綠將$1,2,3,\cdots\cdots,2019$這 2019 個正整數依序寫在各種顏色的卡片上，

每張卡片上都只寫一個數。

在$1,2,3,\cdots\cdots,2019$中，對於兩相異正整數 a 與 b，

如果 a 是 b 的因數，則小綠必須將它們寫在不同顏色的卡片上。

請問：小綠最少需要幾種不同顏色的卡片才足夠？

答：11 種。

解：

顯然，$1,2,2^2,\cdots\cdots,2^{10}$ 這 11 個數必須寫在不同顏色的卡片上，

所以至少需要 11 種顏色的卡片。

接著我們證明 11 種顏色是足夠的，假設這 11 種顏色分別為$c_1,c_2,c_3,\cdots\cdots,c_{11}$。

如果 n 是 k 個質數相乘，我們就將 n 寫在顏色為c_{k+1}的卡片上。

例如$42=2\times3\times7$，就將 42 寫在c_4色卡片上；

$60=2\times2\times3\times5$，就將 60 寫在$c_5$色卡片上；

1 是 0 個質數相乘，就將 1 寫在c_1色卡片上。

對於$1\le n\le 2019$，n 一定是 10 個以下的質數相乘，

否則會有$n\ge\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2}_{11個2}=2048$，矛盾。

故可知$1,2,3,\cdots\cdots,2019$都可以寫在$c_1,c_2,c_3,\cdots\cdots,c_{11}$色的卡片上。

因為任兩個c_{k+1}色卡片上的相異數 a 與 b 都是 k 個質數相乘，

所以 a 不可能是 b 的因數，故這樣的方法符合題目的要求。