

大學入學考試中心
九十四學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內作答，選擇題答錯均倒扣。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。第貳部份作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位以黑色或藍色筆作答，並標明題號。

作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 選擇題：只用 1, 2, 3, 4 等四個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 5, 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單一選擇題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 ₃ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 10 題為多重選擇題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 ₁ 與 ₃ 劃記，如：

10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 ₋ 與第 21 列的 ₇ 劃記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

▶▶ 試題最後附有計算可能用到的數值。

祝考試順利

第壹部分：選擇題(佔 78 分)

一、單選題 (18%)

說明：第1至3題，每題選出一個最適當的選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題答對得6分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣2分，倒扣到本大題之實得分數為零為止，未作答者，不給分亦不扣分。

1. 地震規模的大小通常用芮氏等級來表示。已知芮氏等級每增加 1 級，地震震幅強度約增加為原來的 10 倍，能量釋放強度則約增加為原來的 32 倍。現假設有兩次地震，所釋放的能量約相差 100,000 倍，依上述性質則地震震幅強度約相差幾倍？請選出最接近的答案。

- (1) 10 倍
- (2) 100 倍
- (3) 1000 倍
- (4) 10000 倍

2. $\frac{\sin 3\theta}{\sec 2\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\csc 2\theta}$ 可化簡為

- (1) $\sin \theta$
- (2) $\cos \theta$
- (3) $\tan \theta$
- (4) $\cot \theta$

3. 令 $i = \sqrt{-1}$ ， \bar{z} 表複數 z 的共軛複數。在複數平面上，所有滿足方程式 $(1+i)z - (1-i)\bar{z} = 0$ 的複數 z ，會形成下列哪種的圖形？

- (1) 一點
- (2) 一圓
- (3) 一直線
- (4) 兩直線

二、多選題 (48%)

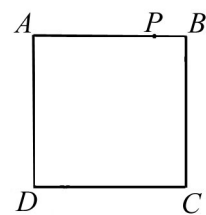
說明：第 4 至 9 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分，每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分，整題未作答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 2 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 設 $f(x) = x^2 + a(1 - x^2)$ 為一實係數多項式函數， a 為常數。下列敘述何者正確：
- (1) 不論 a 是何值， $f(x)$ 的函數圖形都不可能是直線。
 - (2) 不論 a 是何值，若 $f(x)$ 有極值，則極值都等於 a 。(註：極大值與極小值統稱極值)
 - (3) 0 有可能是 $f(x)$ 的極大值。
 - (4) 若 $a \neq 0$ ，則 $f(x) = 0$ 無重根。

5. 如圖， $ABCD$ 是邊長為 1 的正方形，在 AB 、 BC 、 CD 、 DA 四邊上依序任取一點 P 、 Q 、 R 、 S (皆非頂點)。若 $PQRS$ 是長方形但不是正方形，下列敘述何者正確：

- (1) $\triangle SAP$ 與 $\triangle PBQ$ 相似。
- (2) $\triangle SAP$ 和 $\triangle QCR$ 全等。
- (3) $PB = QB$ 。

- (4) $\triangle PBQ$ 的最大可能面積為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。



6. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 與空間中兩點 $P = (1, -2, 1)$, $Q = (-1, 2, -1)$ 的關係是：

- (1) 直線 PQ 和球面交於兩點。
- (2) 線段 PQ 和球面交於兩點。
- (3) 直線 PQ 與球面相切。
- (4) 直線 PQ 通過球心。

7. 宴會在場的 50 位賓客有人偷了主人的珠寶，由於賓客身上都沒有珠寶，而且他們都不承認偷竊。警方決定動用測謊器，並且只問客人一個問題：「你有沒有偷珠寶？」。已知若某人說謊，則測謊器顯示他說謊的機率為 99%；若某人誠實，則測謊器顯示他誠實的機率是 90%。下列敘述何者正確：

- (1) 設竊賊只有一人。當賓客受測時，測謊器顯示賓客說謊的機率大於 10%。
- (2) 設竊賊只有一人。當測謊器顯示一賓客說謊時，該賓客正是竊賊的機率大於 50%。
- (3) 設竊賊只有一人，當測謊器顯示一賓客誠實時，該賓客卻是竊賊的機率小於 20%。
- (4) 當測謊器顯示一賓客說謊時，該賓客是竊賊的機率，並不因竊賊人數多少而改變。

8. A 是 2×2 方陣，設 $A^2 = A \cdot A$ ， $A^3 = A \cdot A \cdot A$ ，以此類推。已知 $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，

$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，若有 a, b 使得 $A^4 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，下列敘述何者正確：

(1) $a = -3$ 。

(2) $b = 2$ 。

(3) $A^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

(4) A 是一旋轉方陣。

9. 有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其 y 坐標 ≥ 0 ），並與 x -軸、直線 $y = x - 1$ 、直線 $y = -x - 1$ 相切。下列敘述何者正確：

(1) 此拋物線的對稱軸必為 y -軸。

(2) 若此拋物線對稱軸為 y -軸，則其焦距為 1。（註：拋物線的焦距為焦點到頂點的距離）

(3) 此拋物線的頂點必在 x -軸上。

(4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

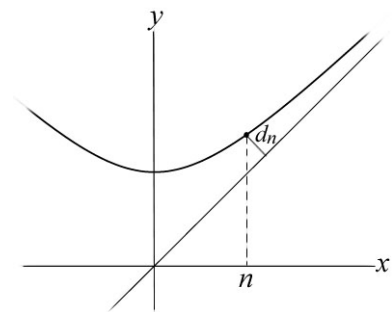
三、選填題 (12%)

說明：A、B各題為選填題，請在答案卡的「解答欄」之列號(10-13)中標示答案。每一題完全答對得6分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 全班男女生共 51 人，票選畢業旅行的目的地，每人限投一票，結果如右表。現以簡單隨機抽樣，抽出兩人，若這兩人都是女生，則這兩人都想去墾丁的機率是 $0.\underline{10}\underline{11}$ (以四捨五入取到小數兩位)。

	女	男
墾丁	10	10
澎湖	6	10
花東	9	6

- B. 考慮雙曲線 $y^2 - x^2 = 1$ 圖形的上半部 (如右圖)，取此雙曲線上 x 坐標為 n 的點與漸近線 $y = x$ 的距離，記為 d_n ，其中 n 為正整數。則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot d_n) = 0.\underline{12}\underline{13}$ (以四捨五入取到小數兩位)



----- 以下部分作答於答案卷 -----

第貳部分：非選擇題（佔 22 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二），與子題號（1、2、3、…）同時必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、 袋中有三個一樣大小的球，分別標示 10 分、20 分、30 分。重複自袋中取出一球後放回，記錄得分並累加，其中取出各球之機率皆相等。

1. 求抽三次後總分為 60 分的機率。（5 分）
2. 遊戲「過三十」的規則是重複抽球，直到總得分大於或等於 30 分後停止，總得分恰為 30 分者輸，超過 30 分者贏。求贏得此遊戲之機率。（6 分）

二、 平面上有一橢圓，已知其焦點為 $(0,0)$ 和 $(4,4)$ ，且 $y = x + \sqrt{2}$ 為此橢圓的切線。

1. 求此橢圓的半長軸長。（6 分）
2. 設此橢圓方程式為 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 1$ ，求 A 、 B 、 C 、 D 、 E 之值。（5 分）

常用數值

1. $\pi \approx 3.1416$
2. $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $\sqrt{3} \approx 1.7321$, $\sqrt{5} \approx 2.2361$, $\sqrt{7} \approx 2.6458$ 。
3. $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

九十四學年度指定科目考試
數學甲考科選擇題參考答案

題號		答案
1		3
2		1
3		3
4		2,4
5		1,2,3
6		1,2,4
7		1,3
8		2,3,4
9		2,4
A	10	1
	11	5
B	12	3
	13	5

第貳部分：非選擇題(佔22分)

一、1. $(10,20,30): \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3! = \frac{2}{9}$; $(20,20,20): \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ \therefore 所求 $= \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$

2. ①先求輸的機率 $P(\text{lose})$:

$(30): \frac{1}{3}$; $(20,10): \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2! = \frac{2}{9}$; $(10,10,10): \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$\therefore P(\text{lose}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{16}{27}$

② $P(\text{win}) = 1 - P(\text{lose}) = 1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27}$

二、1. 將 $O(0,0)$ 對直線 $y = x + \sqrt{2}$ 作對稱點得 $O'(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

且有 $\overline{OP} = \overline{O'P}$, 再由橢圓光學性質知:

O', P, F 共線 $\therefore \overline{OP} + \overline{PF} = 2a \Rightarrow \overline{O'P} + \overline{PF} = 2a \Rightarrow 2a = \overline{O'F}$

$\Rightarrow 2a = \sqrt{(4 + \sqrt{2})^2 + (4 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{36} = 6$

故得 $a = 3$

2. \forall 橢圓上的點 $P(x, y)$ 均有 $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a = 6$

$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = 6$

$\Rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = (6 - \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2})^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 36 + (x-4)^2 + (y-4)^2 - 12\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$

$\Rightarrow 12\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = -8x - 8y + 68$

$\Rightarrow 3\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = -2x - 2y + 17$

$\Rightarrow 9[(x-4)^2 + (y-4)^2] = (-2x - 2y + 17)^2$

$\Rightarrow 9x^2 - 72x + 9y^2 - 72y + 288 = 4x^2 + 4y^2 + 289 - 68x - 68y + 8xy$

$\Rightarrow 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 4x - 4y = 1$