北一女 挑戰甄選(第九期)參考答案

一. $a_{2002}=111\cdots1222\cdots2=111\cdots1\times10^{2002}+222\cdots2=111\cdots1\times(10^{2002}+2)$

又 $10^{2002}+2$ **為**3**的倍數且** $10^{2002}+2=3\times\underbrace{33\cdots34}_{2002位}$

所以 $a_{2002}=\underbrace{33\cdots33}_{2002位}\times\underbrace{33\cdots34}_{2002位}$

因此， a_{2002}**是兩個相鄰整數之積。**

(**註：**$\langle a_n\rangle$**中的任一個數都是兩個相鄰整數之積**)

二.(1)**先找** $f(1)$**的值**

設 $f(1)=c$**，則** $f(2c)=f(c+c)=f\left(f(c)+f(c)\right)=2$

又當任意 $f(m)=n$ **時，** $f(2n)=f(n+n)=f\left(f(m)+f(m)\right)=m+m=2m$

因此，若 $c>1$**，則可令** $c=1+a$ **且** $f(a)=b$

那麼 $f(2c)=f(2+2a)=f\left(f(2c)+f(2b)\right)=2c+2b>2$ ……①

又 $f(2c)=2$ ……②

①**與**②**是矛盾的，所以** $c>1$ **不可能，因此** $c=1$**，即** $f(1)=1$**。**

(2) $f\left(f(1)+f(1)\right)=f(1+1)=f(2)$ **又** $f\left(f(1)+f(1)\right)=1+1=2$ **所以** $f(2)=2$

且 $f(3)=f(1+2)=f\left(f(1)+f(2)\right)=1+2=3$

由此可猜測， $f(k)=k\ ,\forall k\in N$

利用上面的方法及數學歸納法，即可證之。

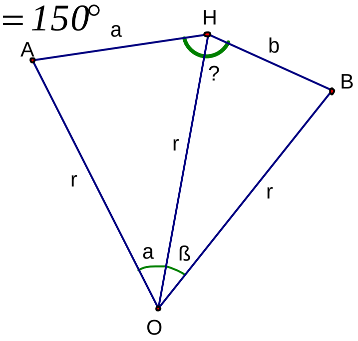
所以滿足條件的函數 f **為** $f(n)=n\ ,\forall n\in N$

因此，$f(2002)=2002$

三.設此圓的半徑為 r，此 12 邊形，可以以圓心為頂點分割成 12 個等腰三角形，其中必有兩個相鄰的底分別是 a 與 b，

令它們的頂角分別是 α , β ，6(α ＋ β)=360 °

，所以 α ＋ β =60 °，那麼 $\angle AHB = q = \dfrac{360^\circ - 60^\circ}{2} = 150^\circ$



又 $\triangle AOB$ 必為正三角形

$(\because \overline{AO} = \overline{BO}$ 且 $\angle AOB = 60^\circ \quad \therefore \overline{AB} = r)$

由此可知，$\triangle AOH$ 與 $\triangle BOH$ 的面積和

$$= \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}ab \cdot \sin 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{1}{4}ab$$

又由餘弦定理可知：$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 150^\circ = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab$

原 12 邊形的面積必為 $\triangle AOH$ 與 $\triangle BOH$ 的面積和的 6 倍

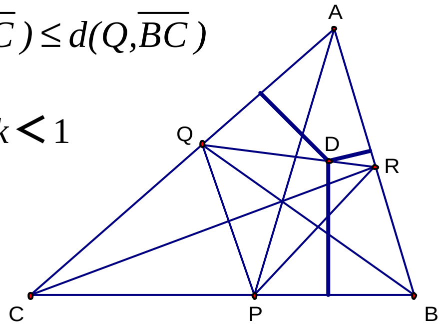
$$= 6 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab) + \frac{1}{4}ab\right] = 6ab + \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2)$$

四.設 $d(X,L)$ 表示 X 點到 L 直線的距離

今欲証：D 在 $\overline{RQ}$ 上的充要條件為 $d(D,\overline{BC}) = d(D,\overline{AC}) + d(D,\overline{AB})$

(1)充分條件：

設 D 在 $\overline{RQ}$ 上，不失一般性假設 $d(R,\overline{BC}) \le d(Q,\overline{BC})$



則存在一個實數 k 使得 $\overline{DR} = k\overline{QR}$, $0 < k < 1$

由平行線性質可知

$$\frac{k}{1} = \frac{\overline{DR}}{\overline{QR}} = \frac{d(D,\overline{BC}) - d(R,\overline{BC})}{d(Q,\overline{BC}) - d(R,\overline{BC})}$$

所以 $d(D,\overline{BC}) - d(R,\overline{BC}) = k \cdot \left[d(Q,\overline{BC}) - d(R,\overline{BC})\right]$

即 $d(D,\overline{BC}) = k \cdot \left[d(Q,\overline{BC}) - d(R,\overline{BC})\right] + d(R,\overline{BC}) \quad \ldots\ldots ①$

又 $d(D,\overline{BC}) = k \cdot d(Q,\overline{BC}) \quad \ldots\ldots ②$

且 $\dfrac{d(D,\overline{AC})}{d(R,\overline{AC})}=1-k$ 即 $d(D,\overline{AC})=(1-k)\cdot d(R,\overline{BC})$

又因為 $\overline{BQ}$為$\angle B$ 的角平分線，所以 $d(Q,\overline{BC})=d(Q,\overline{AB})$

同理 $d(R,\overline{AB})=d(R,\overline{BC})$ ……③

由①,②,③三式結合得

$$\begin{aligned}&d(D,\overline{BC})-d(D,\overline{AB})-d(D,\overline{AC})\\&=k\cdot\left[d(Q,\overline{BC})-d(Q,\overline{AB})\right]+(k-1)\cdot\left[d(R,\overline{AC})-d(R,\overline{BC})\right]=0\end{aligned}$$

所以 $d(D,\overline{BC})=d(D,\overline{AC})+d(D,\overline{AB})$

(2)必要條件：

設 D 不在 $\overline{QR}$上，則 D 可能在$\triangle AQR$ 內或在$\triangle AQR$ 的下方。

(i)當 D 在$\triangle AQR$ 內時，過 D 作 $\overline{BC}$的垂線，必交 $\overline{QR}$於一點，令它為 E，

則由(1)的結果可得 $d(E,\overline{BC})=d(E,\overline{AC})+d(E,\overline{AB})$

但 $d(D,\overline{BC})>d(E,\overline{BC})$

且 $d(D,\overline{AC})+d(D,\overline{AB})<d(E,\overline{AC})+d(E,\overline{AB})$

所以 $d(D,\overline{BC})>d(D,\overline{AC})+d(D,\overline{AB})$ 與已知矛盾，

所以 D 不可能在$\triangle AQR$ 內部。

(ii)同法可得證，D 也不可能在$\triangle AQR$ 下方。

所以 D 不可能不在 $\overline{QR}$線段上，得證。