北一女 挑戰甄選(第八期)參考答案

1.**用歸納法証之：**

(1)**當** $n=1$ **時，** $(\sqrt{2}-1)^1=\sqrt{2}-\sqrt{1}$

當 $n=2$ **時，** $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$

所以 $n=1$ **或** 2 **時，命題成立**.

(2)(i)**設** $n=2k-1$,**命題成立且** $(\sqrt{2}-1)^{2k-1}=b\sqrt{2}-a$**，其中** b,a **均為正整數**

且 $2b^2-a^2=1$**，**

則 $n=2k-1$ **時，**
$$\begin{aligned}&(\sqrt{2}-1)^{2k+1}\\&=(\sqrt{2}-1)^{2k-1}\cdot(\sqrt{2}-1)\\&=(b\sqrt{2}-a)(3-2\sqrt{2})\\&=(3b+2a)\sqrt{2}-(4b+3a)\end{aligned}$$

且 $2(3b+2a)^2-(4b+3a)^2=18b^2+24ab+8a^2-16b^2-24ab-9a^2=2b^2-a^2=1$

即 $n=2k+1$ **時命題亦成立**.

(ii)**設** $n=2k$ **時，命題成立，且** $(\sqrt{2}-1)^{2k}=c-d\sqrt{2}$**，其中** c,d **為正整數，**

且 $2c^2-d^2=1$

則當 $n=2k+2$ **時，**

$$(\sqrt{2}-1)^{2k+2}=(\sqrt{2}-1)^{2k}(\sqrt{2}-1)^2=(c-d\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=(3c+4d)-(3d+2c)\sqrt{2}$$

且 $(3c+4d)^2-2(3d+2c)^2=9c^2+24cd+16d^2-18d^2-24cd-8c^2=c^2-2d^2$

即 $n=2k+2$ **時，命題成立**.

所以由數學歸納法原理可知本命題成立.

2.設 $f(x)=x^{999}+x^{888}+\cdots\cdots+x^{111}+1$

$g(x)=x^{9}+x^{8}+\cdots\cdots+x+1$

則 $f(x)-g(x)=(x^{999}-x^{9})+(x^{888}-x^{8})+\cdots\cdots+(x^{111}-x^{1})$

$=x^{9}(x^{990}-1)+x^{8}(x^{880}-1)+\cdots\cdots+x(x^{110}-1)$

又 $x^{990}-1, x^{880}-1, \cdots, x^{110}-1$ 均是 $x^{10}-1$ 的倍數

所以 $f(x)-g(x)=(x^{10}-1)\cdot Q(x)$ (Q(x)為一多項式)

故 $f(x)=(x-1)(x^{9}+x^{8}+\cdots+x+1)\cdot Q(x)+g(x)=(x^{9}+x^{8}+\cdots+x+1)\cdot[(x-1)\cdot Q(x)+1]$

所以 $f(x)$ 被 $x^{9}+x^{8}+\cdots+x+1$ 整除,得證.

3.不可能,理由：依移動的規則, 不論怎麼走, 有劃斜線的格子內的棋子必須走在有斜線的格子內;同樣的沒斜線的格內必須走在沒斜線的格子內, 所以無法完成。

4.(1)在 2×10 的格子內, 我們將填格子的方法分兩類：

(i)1 與 10 在同一列的兩相鄰格子內, 或在上、下兩行且上下相鄰, 那麼填法必定連成順時鐘方向或逆時鐘方向的一個環圈。

此填法 10×2=20 種(因為每個格子都可以是起點)

(ii)非(i)類, 如下圖Ⓐ,Ⓑ,Ⓒ……

Ⓐ 2 3
1 4 5

Ⓑ 3 4 5
2 1 6 7

Ⓒ 4 5 6 7
3 2 1 8 9

(一)在Ⓐ圖中, 從 6 開始可往上或往右, 往右時恰一種填法；而往上時, 7 必須往右, 接著 8 可往下或往右,…依此法則填下去, 共有 8 種.

(二)在Ⓑ圖中, 從 8 開始, 其填法如Ⓐ圖的考慮方式, 共有 7 種填法。

(三)在Ⓒ圖中, 從 10 開始, 其走法如Ⓑ圖的方式, 共有 6 種填法。

依上面的方式進行, 可推算出Ⓐ+Ⓑ+Ⓒ+Ⓓ+…的走法共有

8+7+6+…+2+1=36 種,

但非(i)類Ⓐ,Ⓑ,Ⓒ,…的填法, 依對稱的原則(上下對稱,左右對稱), 共有四種方向, 所以共 36×4=144 種。

因此, 20 個小方格的長方形方格表上, 填 20 個數符合, 所求條件者共

20+144=164 種。

(2)當長方形方格有 $2n$ 格, 填 $1,2,\ldots,2n$ 時, 依(1)的處理方法, 共有

$$2\cdot 2n+4\cdot[(n-2)+(n-1)+\cdots+2+1]=4n+4\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}=2n^{2}-2n+4$$