北一女 挑戰甄選(第七期)參考答案

1　**已知** $a>b>c>0$，**證明** $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$

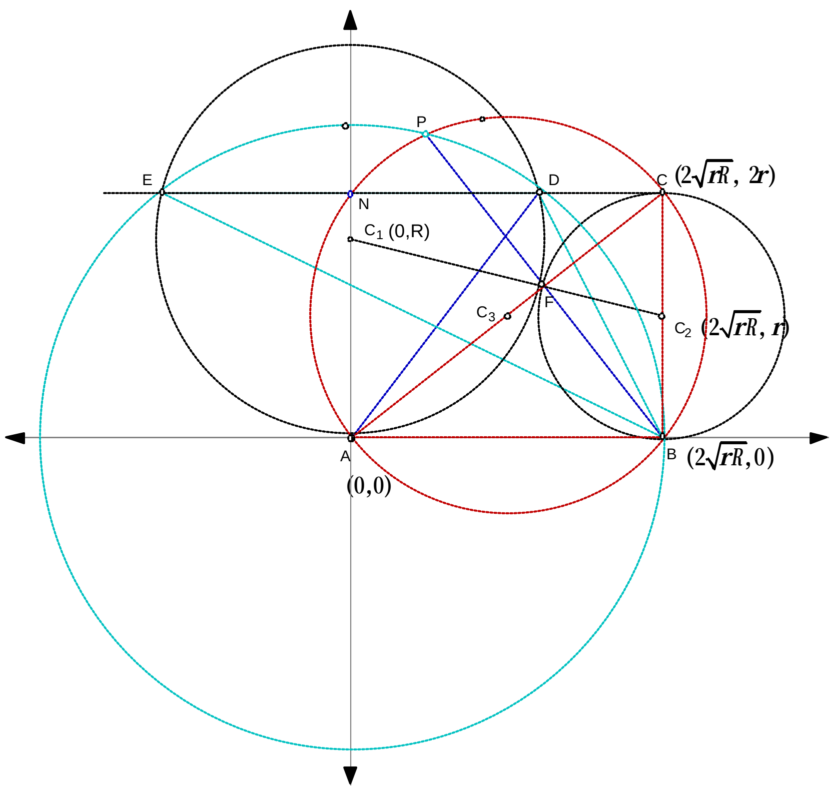
證明：可知 $\frac{a}{b}>1$，$\frac{b}{c}>1$，$\frac{a}{c}>1$，**且** $a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$

又
$$\begin{aligned}\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}&=a^{2a-(b+c)}b^{2b-(c+a)}c^{2c-(a+b)}\\&=a^{(a-b)+(a-c)}b^{(b-c)+(b-a)}c^{(c-a)+(c-b)}\\&=(\frac{a}{b})^{a-b}(\frac{a}{c})^{a-c}(\frac{b}{c})^{b-c}>1^0 1^0 1^0=1\end{aligned}$$

因此 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$

2　**如果有一個** n **滿足已知條件，則** $n\geq 9$，**不妨令甲認識** $A_1A_2\cdots A_8$ **等八人，由題設甲與** A_1 **必共同認識四個人，不妨假設他們是** $A_2A_3A_4A_5$，**此時** A_1 **與** A_6 **必不相識，但** A_6 **與甲認識，所以** A_6 **必認識** $A_2A_3A_4A_5A_7A_8$ **中的四人，也就是** A_6 **必認識** $A_2A_3A_4A_5$ **中的兩人，因此** A_6 **與** A_1 **必認識** $A_2A_3A_4A_5$ **中的兩人，再加上認識甲，至少有三人以上，與已知矛盾，所以** n **不存在。**

3



如上圖所示，不妨設 c_1c_2 分別為兩圓的圓心，且 $c_1(0,R)$， $c_2(2\sqrt{rR},r)$，

$A(0,0)$， $B(2\sqrt{rR},0)$，**那麼圓的方程式分別為**

$c_1 : x^2+(y-R)^2=R^2$ ， $c_2 : (x-2\sqrt{rR})^2+(y-r)^2=r^2$

可求得點 c 的座標 $(2\sqrt{rR},2r)$，則△ ABC 的外接圓的圓心為 $\overline{AC}$ 的中點 $c_3(\sqrt{rR},r)$，半徑為 $\sqrt{Rr+r^2}$，所以圓 c_3 的方程式

$(x-\sqrt{Rr})^2+(y-r)^2=Rr+r^2$

L 直線過 c 且平行 x 軸（即 $\overleftrightarrow{AB}$），交 c_1 於 D，E，如圖，可求得

$D(2\sqrt{Rr-r^2},2r)$

因此 $\overline{AD}=\sqrt{4(Rr-r^2)+4r^2}=2\sqrt{Rr}=\overline{AB}$，

所以以 A 為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑的圓 c_4（即△ ABD 的外接圓），

其方程式為 $\sqrt{Rr}\,x-ry=Rr$ －－－※

另外可求得點 F 的座標為 $\left(\dfrac{2R\sqrt{Rr}}{R+r},\dfrac{2Rr}{R+r}\right)$，**將點 F 代入※式，可知 F 在直線※上。**