北一女 挑戰甄選(第六期)參考答案

1 (1) 利用歸納法証之

i. 當 $n=1$ 時，顯然地命題成立

ii 假設此不等式對某個 k 成立，則欲証 $k+1$ 時也成立，
我們可以得下列的推論

$$(1+\frac{1}{n})^{k+1}=(1+\frac{1}{n})^{k}(1+\frac{1}{n})\geq(1+\frac{k}{n})(1+\frac{1}{n})$$
$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2}>1+\frac{k+1}{n}$$

又

$$(1+\frac{1}{n})^{k+1}=(1+\frac{1}{n})^{k}(1+\frac{1}{n})<(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2})(1+\frac{1}{n})$$
$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}$$
$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+2k+1}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}-\frac{k+1}{n^2}$$
$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3}$$
$$<1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}\left(\text{因為 } n(k+1)>k^2\right)$$

所以 $k+1$ 時此不等式亦成立，得証。

(2) 由(1)及 $k=n$ 時，即得 $2<(1+\frac{1}{n})^{n}<3$

由於 $(1+\frac{1}{1000})^{1000}<3$，因此 $(\frac{1001}{1000})^{1000}<3<1000$

亦即 $1001^{999}\times\frac{1001}{1000}<1000^{1000}\left(\text{上式乘以 } 1000^{999}\right)$

所以 $1001^{999}<1000^{1000}$

2 設 $\frac{x(y+z-x)}{\log x}=\frac{y(x+z-y)}{\log y}=\frac{z(x+y-z)}{\log z}=k$

則 $\begin{cases} x(y+z-x)=k\cdot\log x \\ y(x+z-y)=k\cdot\log y \\ z(x+y-z)=k\cdot\log z \end{cases}$

可得 $\frac{\log x-\log y}{\log z}=\frac{x(y+z-x)-y(x+z-y)}{z(x+y-z)}=\frac{(x-y)(z-x-y)}{z(x+y-z)}=\frac{y-x}{z}$

$z(\log x-\log y)=(y-x)\log z$

即 $z\log x+x\log z=y\log z+z\log y$

因此 $x^z z^x=z^y y^z$

同理可証 $z^y y^z=x^y y^x$，所以本命題成立。