

北一女中數學挑戰甄答題（第六期）

1. (1) n 為自然數，證明：對任意自然數 $k \leq n$ ，

$$1 + \frac{k}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{k+1}{n}。$$

(2) 利用 (1) 的結果，證明 $2 < 1 + \frac{1}{n} < 3$ ，並比較 1000^{1000} 與 1001^{999} 的大小。

2. 設 x 、 y 、 z 為不等於 1 的正數，且

$$\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(x+z-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z} \neq 0。$$

證明： $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ 。