北一女 挑戰甄選(第五期)參考答案

1. (1)

由根與係數關係可知

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ac=-1 \\ abc=1 \end{cases}$$

若有兩根相等，不失一般性令 $a=b$**，則上式可化為**

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ a^2+ac=-1 \\ a^2c=1 \end{cases}$$ **由第一式可得** $c=1-2a$ **代入第二式，得**

$a^2+a(1-2a)=-1$，**即** $a^2-a-1=0$ ———（＊）

因此 $a^2=a+1$**代入第三式得** $(a+1)(1-2a)=1$，**即** $2a^2+a=0$，

亦即 $a=0$**或**$\dfrac{-1}{2}$**代入（＊）式驗證不合，所以 a 與 b 不可能相等，亦即三個根兩兩相異。**

(2)

令 $S_n=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}+\dfrac{b^n-c^n}{b-c}+\dfrac{c^n-a^n}{c-a}$，n **為任一非負整數，易得**

$S_0=0$ $S_1=3$ $S_2=2$

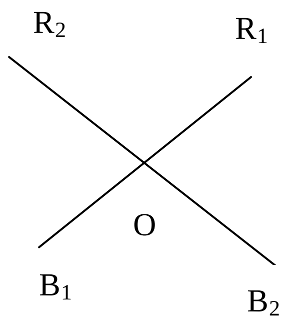
又 $\begin{cases} a^3=a^2+a+1 \\ b^3=b^2+b+1 \\ c^3=c^2+c+1 \end{cases}$ **可得** $\begin{cases} a^{n+3}=a^{n+2}+a^{n+1}+a^n \\ b^{n+3}=b^{n+2}+b^{n+1}+b^n \\ c^{n+3}=c^{n+2}+c^{n+1}+c^n \end{cases}$

因此

$$S_{n+3}=\frac{a^{n+3}-b^{n+3}}{a-b}+\frac{b^{n+3}-c^{n+3}}{b-c}+\frac{c^{n+3}-a^{n+3}}{c-a}$$
$$=\frac{(a^{n+2}+a^{n+1}+a^n)-(b^{n+2}+b^{n+1}+b^n)}{a-b}+\frac{(b^{n+2}+b^{n+1}+b^n)-(c^{n+2}+c^{n+1}+c^n)}{b-c}$$
$$+\frac{(c^{n+2}+c^{n+1}+c^n)-(a^{n+2}+a^{n+1}+a^n)}{c-a}$$
$$=S_{n+2}+S_{n+1}+S_n$$
$$\forall n\geq 0$$

由歸納法即可証得 S_n **均為整數, 特別地當** $n=2002$ **時,** S_{2002} **也是整數，所以本命題成立。**

2 **因為任意三點不共線，設** G_k **為依題目條件連接而成的** 2002 **條紅黑兩端的線段的長，可知** k **必然是有限的，令** L_k **為** G_k **的總線段長之和，顯然** L_k **中必有最小的數，不妨設** L_1 **是最小值，此時我們必可確定** G_1 **中的** 2002 **條縣段必然都不相交，否則若有兩條線段相交，不妨設** $\overline{B_1R_1}$ **與** $\overline{B_2R_2}$ **相交，如下圖**



$$\overline{B_1R_2}+\overline{B_2R_1}<\overline{B_1O}+\overline{R_2O}+\overline{B_2O}+\overline{R_1O}$$

即$\overline{B_2R_1}+\overline{B_1R_2}<\overline{B_1R_1}+\overline{B_2R_2}$

此時，由 $\overline{B_2R_1}$**，**$\overline{B_1R_2}$ **形成的兩條線段加上在** G_1 **中其餘的線段長的和，這個結果與** L_1 **最小相矛盾，所以** G_1 **必合所求的條件**.