北一女 挑戰甄選(第四期)參考答案

1　設 $p(x)=(x-a)(x-b)$，則 $a+b=a$， $ab=b$

那麼
$$\begin{aligned}&p(m)p(m+1)=(m-a)(m-b)(m+1-a)(m+1-b)\\&=[(m-a)(m-b+1)]\cdot[(m-b)(m+1-a)]\\&=(m(m-b)+m-a(m-b)-a)\cdot(m(m-a)+m-b(m-a)-b)\end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned}&m(m-b)+m-a(m-b)\\&=m^2-mb+m-am+ab=m^2-m(a+b)+m+ab\\&m(m-a)+m-b(m-a)\\&=m^2-ma+m-bm+ab=m^2-m(a+b)+m+ab\end{aligned}$$

所以取 $n=m^2-m(a+b)+m+ab$ 時，
n 為整數且 $p(m)p(m+1)=p(n)$　　得證.

2　當有理數 r 使 $|4r-2|\le 1$ 時， $|2r-1|\le\frac{1}{2}$，即 $-\frac{1}{2}\le 2r-1\le\frac{1}{2}$，

亦即， $\frac{1}{4}\le r\le\frac{3}{4}$

對任意 $r\ge\frac{1}{4}$ 而言， $\frac{4r-1}{27r^4}\ge 0$，且 $\frac{4r-1}{27r^4}=0$ 時， $r=\frac{1}{4}$，

除此之外 $\frac{4r-1}{27r^4}>0$

令 $n=\frac{4r-1}{27r^4}\in N$，則 $27r^4n-4r+1=0$

取 $k=\frac{1}{n}$ 時， $27r^4-4rk+k=0$

上式可化為 $81r^4-12rk+3k=0$
即可得 $81r^4-18r^2+1+18r^2-12rk+3k-1=0$
即 $(9r^2-1)^2+2(3r-1)^2-12r(k-1)+3(k-1)=0$
亦即 $(9r^2-1)^2+2(3r-1)^2+3(k-1)(1-4r)=0$

由此可得 $(k-1)(1-4r)\le 0$，又因為 $r\ge\frac{1}{4}$，

所以 $k-1\ge 0$，即 $k\ge 1$，亦即 $n\le 1$，　但 $n\in N$，所以 $n=1$.

所以 $\frac{4r-1}{27r^4}=1$，即 $27r^4-4r+1=0$,即 $(3r-1)^2(3r^2+2r+1)=0$，

所以 $r=\frac{1}{3}$，　因此滿足此已知條件的 $r=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{3}$.

3 設 n 為正整數且 n^2 的所有各個位數的數字和為 n，設 n 的位數為 m，且 $S(n^2)$ 表示 n^2 的位數的各個位數的數字和。我們可知 n^2 的位數不超過 $2m$，且每個數字不超過 9，所以 $S(n^2) \le 2m \cdot 9 = 18m$。另一方面 $n \ge 10^{m-1}$，且當 $m \ge 3$ 時，$18m < 10^{m-1}$，所以 $S(n^2) < n$ 也成立，因此，我們可確定 $m = 1$ 或 $m = 2$ 時，才能有 n 使得

$n = S(n^2) \le 18 \cdot 2 = 36$

因為 $n^2 \equiv S(n^2) \pmod 9$

所以 $n^2 - n \equiv 0 \pmod 9$，即 $n(n-1)$ 是 9 的倍數。

由此可得到所有 n 為 1，9，10，18，19，27，28，36

使 $n(n-1)$ 為 9 的倍數，這些數中只有 1，9 為所求。

4 （用歸納法證之）

（1）當 $n = 0$ 時，此時 $f(x)$ 為常數多項式，即 $f(x) = a_0$，又

$$\left|r^0 - f(0)\right| = \left|1 - a_0\right|,\quad \left|r^{n+1} - f(1)\right| = \left|r - a_0\right|$$

如果 $\left|1 - a_0\right|$，$\left|r - a_0\right|$ 均小於 1，則

$$\left|r - 1\right| = \left|(r - a_0) + (a_0 - 1)\right| \le \left|r - a_0\right| + \left|1 - a_0\right| < 2,$$

此時，$-2 < r - 1 < 2$，因此 $r < 3$ 與已知不合，所以 $\left|r - a_0\right|$，$\left|1 - a_0\right|$ 中至少有一個不小於 1，即 $n = 0$ 時，此命題成立。

（2）假設 $n \le k$ 時，命題成立，我們欲證 $n = k + 1$ 時，命題也成立。

令多項式 $g(x) = \dfrac{1}{r-1}(f(x-1) - f(x))$，因 $f(x)$ 為 $k+1$ 次多項式，所以 $g(x)$ 的次數不超過 k 次，因此，由歸納法假設可知存在一個 j，使 $0 \le j \le k + 1$，

使 $\left|r^j - g(j)\right| \ge 1$，即 $\left|r^j - \dfrac{1}{r-1}(f(j+1) - f(j))\right| \ge 1$，

亦即 $1 \le \dfrac{1}{r-1}\left|r^j (r-1) - (f(j+1) - f(j))\right|$

$$\le \frac{1}{r-1}\left|r^{j+1} - f(j+1)\right| + \left|r^j - f(j)\right| \text{-------------------------} *$$

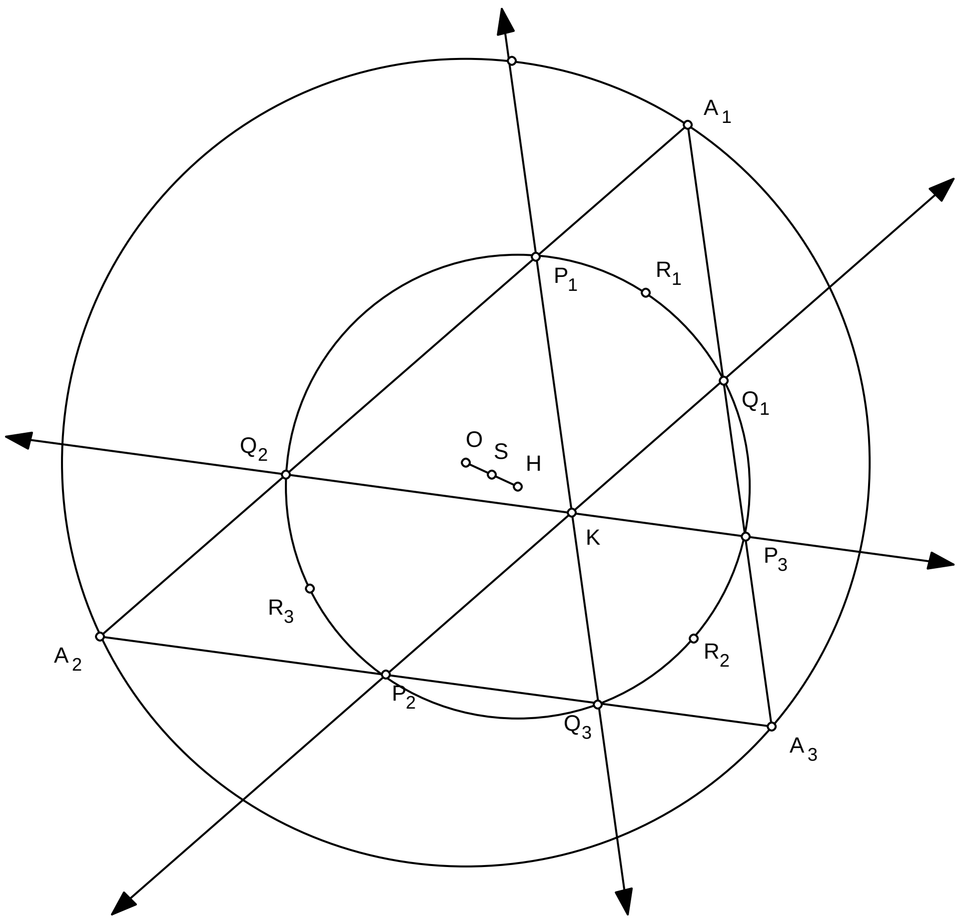
又因為 $r \ge 3$，所以 $r - 1 \ge 2$，

由 $*$ 式可得 $\left|r^{j+1} - f(j+1)\right| + \left|r^j - f(j)\right| \ge 2$

也就是 $\left|r^{j+1} - f(j+1)\right|$ 與 $\left|r^j - f(j)\right|$ 中，至少有一個數不小於 1，

且此時$1 \leq j+1 \leq k+2$，也表示$n=k+1$時，此命題也成立，
所以由數學歸納法知此命題成立。

5



（1）**因為平行線截出的弦等長，也就是弧** P_1Q_1，P_2Q_2，P_3Q_3 **的弧度相等，**

因此$\angle P_3P_1P_2 = \frac{1}{2}P_3Q_3P_2 = \frac{1}{2}P_3Q_3 + \frac{1}{2}Q_3Q_2 = \frac{1}{2}P_1Q_1 + \frac{1}{2}Q_3P_2$

又 $A_1P_1KQ_1$ **為平行四邊形，所以**$\angle A_3A_1A_2 = \angle P_1KQ_1$

而$\angle P_1KQ_1 = \frac{1}{2}P_1Q_1 + \frac{1}{2}Q_3P_2$，**所以**$\angle P_3P_1P_2 = \angle A_3A_1A_2$

同理可得$\angle Q_3Q_1Q_2 = \angle A_3A_1A_2$，**即**$\angle P_3P_1P_2 = \angle Q_3Q_1Q_2$

以同樣的方式可証$\angle P_1P_2P_3 = \angle A_1A_2A_3 = \angle Q_1Q_2Q_3$

所以$\triangle P_1P_2P_3$　$\triangle Q_1Q_2Q_3$　$\triangle ABC$

又$\triangle P_1P_2P_3$**與**$\angle Q_3Q_1Q_2$**是在同一個圓的內接三角形**

所以$\triangle P_1P_2P_3 \cong \triangle Q_1Q_2Q_3$

（2）因為 $A_1P_1KQ_1$ 為平行四邊形，所以$\angle A_1P_1Q_1=\angle KQ_1P_1=$
$\frac{1}{2}P_2Q_2+\frac{1}{2}P_1Q_2=\angle P_1P_2P_3=\angle A_1A_2A_3$，
同理可証$\angle A_1P_1Q_1=\angle A_1A_2A_3$

O 為$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓圓心，我們可証得$\overline{OA_1}\perp\overline{P_1Q_1}$，

$\overline{OA_2}\perp\overline{P_2Q_2}$，$\overline{OA_3}\perp\overline{P_3Q_3}$，令 S 為$\overline{HO}$的中點，且 R_1，R_2，R_3 分

別為 P_1Q_1，P_2Q_2，P_3Q_3 的中點，則$\overline{SR_1}/\!/\overline{OA_1}$，$\overline{SR_2}/\!/\overline{OA_2}$，$\overline{SR_3}/\!/\overline{OA_3}$

（因為$\overline{SR_1}$為$\triangle OKA_1$的中點連線），所以 S 在$\overline{P_1Q_1}$的中垂線上，

同理可証 S 也在$\overline{P_2Q_2}$，$\overline{P_3Q_3}$的中垂線上，因此 S 是過 P_1，P_2，

P_3，Q_1，Q_2，Q_3 的圓的圓心，也就是已知的點 H，
所以 O、H、K 三點共線，得證。