北 一 女 中 數 學 挑 戰 甄 選 試 題（第四期） 90.12.12

1. 二次多項式 $P(x)=x^2+ax+b$ ，其中a,b為兩個給定的任意整數，

   試證：對任意整數m，必存在一整數n，使得 $P(m)P(m+1)=P(n)$ 。

2. 試求出所有有理數r，使得 $|4r-2|\le 1$ 且 $\dfrac{4r-1}{27r^4}$ 是一個整數。

3. 試求出所有正整數n，使得n^2的所有各個位數的數字的總和為n。

4. 設 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 x+a_0$為一實係數 n 次多項式，

   證明:當實數 $r\ge 3$時， $|r^0-f(0)|,|r^1-f(1)|,|r^2-f(2)|,\cdots,|r^{n+1}-f(n+1)|$

   這 n + 2 個數中，至少有一個數不小於 1 。

5. 設在非正三角形$A_1A_2A_3$的內部有一點 K，且過 K 有三直線$\overline{P_2Q_1},\overline{P_3Q_2},\overline{P_1Q_3}$，依序平行於三邊$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1}$，且$P_1$與$Q_2$， P_2與Q_3， P_3與Q_1依序在$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1}$上，

   若P_1,P_2,P_3,Q_1,Q_2,Q_3等六點全落在以 H 為圓心的圓上，且 O 為$\Delta A_1A_2A_3$的外心，

   試證：(1) $\Delta P_1P_2P_3\cong\Delta Q_1Q_2Q_3$ $\Delta A_1A_2A_3$

   (2) O,H,K 三點共線

註 ： 請將書面報告於 91 年 1 月 12 日前交至甄答信箱內