北一女 挑戰甄選(第三期)參考答案

1. (1)**先證兩相鄰項的平均數為完全平方數**

$<a_n>$**中**，$a_n=(2n^2-1)^2, \forall n\in N,$

$\therefore a_n+a_{n+1}=(2n^2-1)^2+(2(n+1)^2-1)^2=2(2n^2+2n+1)^2$

$\frac{a_n+a_{n+1}}{2}=(2n^2+2n+1)^2$**為完全平方數**

(2)**再證兩相鄰項必互質**

因為 a_n**為完全平方數，所以** a_n,a_{n+1}**的最大公因數**(a_n,a_{n+1})**必**

為完全平方 數。令它為 t^2, ? $(2n^2-1\ ,\ 2(n+1)^2-1)=t,$

可知 t **為** $(2(n+1)^2-1)-(2n^2-1)$**的因數，亦即** $t\mid 4n+2$………(1)

但 t **為奇數，所以** $t\mid 2n+1$,**又** t **必為** a_n+a_{n+1}? ? ? ,? (1)? ?

$t\mid\ 2n^2+2n+1$……….(2)

由(1) (2)**可得** $t\mid\ (2n^2+2n+1)-n(2n+1)$,**即** $t\mid 1$

因此(a_n,a_{n+1})=1，**即兩相鄰項必互質。**

2. (A)**數對** a,b，**其中一奇一數共可** 25 **對，這** 25 **對中，依規定的操作方式共有** 21 **組是好數對，其中**(1,6) (2,5) (3,4) (7,8)**四組不是好數對。**

（B）**當盒子數** $n=1$ **或** $n=2$ **或** $n=3$ **時，很容易檢驗題目所求是可以產生的，事實上** $n=4$ **時，配合** $n=3$ **的情況，也可以檢驗其結果也成立，所以我們猜測任意** n **個盒子，此命題都可產生。**

下面用歸納法證明：

（1）**當** $n=1$ **時，顯然成立**

（2）**設** $n=k$ **時成立，則** $n=k+1$ **時**

不論 $n+1$ **個盒子怎排列，我們可以盒子內的球數依序排列如下：** 1　2　3　4 ………………….$k-1$　k　$k+1$

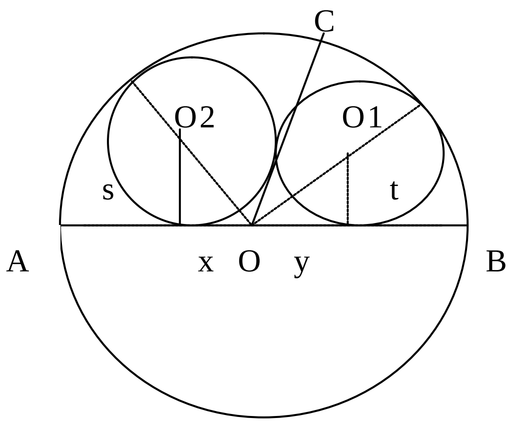
然後從球數最多的盒子內($k+1$ **個球的盒子內**)**取** k **個球到有** k **個球的盒子內，此時** k **個球的盒子內就有** $2k$ **個球，將這個盒子內的球取** $k-1$ **個到原來有** $k-1$ **個球的盒子內，依此法則下去，再將** $n-2$ **個球放入原來有** $k-2$ **個球的盒子內，如此下列，就會使＊列的位置的球數轉化成**

2　3　4　……..k　$k+1$　1

的形式。我們稱以上的操作為一輪迴。接著做第二輪迴(**從有** $n+1$ **個球的盒子開始做起**)，**再做第三、四**…..**輪迴，直到有** $k+1$ **個球的盒子在最右邊的盒子之外，其餘的盒子有** 1,2,3,……..$k-1$,k **個盒子內的球數，**

由左至右依序有 1 **個球，**2 **個球，**3 **個球**,………k **個球，再加上最右邊的球，這時候，從左到右的盒子內的球數依序是** 1,2,3,…….k,$k+1$，**所以當** $n=k+1$ **時，命題也可以完全由歸納法原理知，此命題是可以完成的。**

3.



令此圓的半徑為 r

如上圖，易知 $<O_1OO_2=90$ **度且** ΔOQO_2 **及** ΔOPO_1 **均為直角三角形，且為相似三角形。令** $\overline{OP}=y,\overline{OQ}=x,\overline{PQ_1}=t,\overline{QQ_2}=s$，**則可得** $s：x = y：t$

$s\,t = x\,y$…………….(1)

又 ΔQOQ_2 **中** $(r-s)^2=x^2+s^2$ **可得** $2rs=r^2-x^2$

同理可得 $(r-t)^2=t^2+y^2$, $2rt=r^2-y^2$

因此 $4r^2st=(r^2-x^2)(r^2-y^2)$ ………….(2)

由(1) (2)**可得** $4r^2xy=r^4-(x^2+y^2)x^2+x^2y^2$

$r^2(x^2+y^2+2xy)=r^4-2r^2xy+x^2y^2$

$r^2(x+y)^2=(r^2-xy)^2$ **又** $r > x$, $r > y$

所以 $r(x+y)=r^2-xy$ $r\cdot\overline{PQ}=r^2-xy$

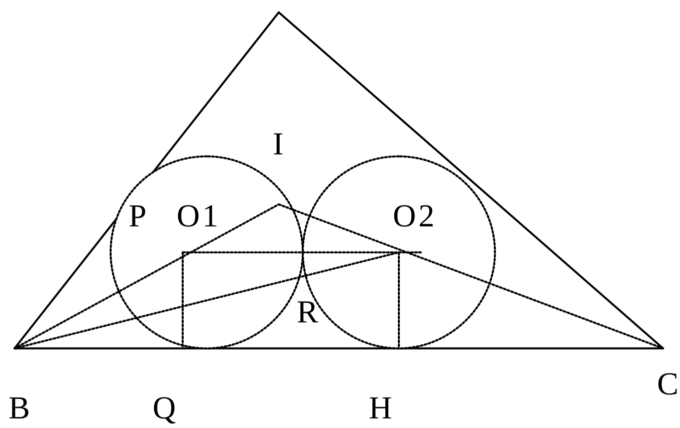
而 $4r\cdot\overline{PQ}=4r^2-4xy\ge 4r^2-(x+y)^2=4r^2-\overline{PQ}^2$

所以 $\overline{PQ}^2+4r\overline{PQ}\ge 4r^2$, $\overline{PQ}^2+4r\overline{PQ}+4r^2\ge 8r^2$

可得 $(\overline{PQ}+2r)^2\ge 8r^2$, $\overline{PQ}+2r\ge 2\sqrt{2}r$

所以 $\overline{PQ}\ge 2(\sqrt{2}-1)r=(\sqrt{2}-1)\overline{AB}$.

4.



解：如上圖

(1) 1. **分別作**$<B$, $<C$ **之平分線相交於** I

2. **在** $\overline{BI}$ **上任取** P**，作** $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ **於** Q**，過** P **作** $\overline{BC}$ **之平行線，並在其上取** $\overline{PR} = 2\overline{PQ}$

3. **作** $\overleftrightarrow{BR}$ **交** $\overline{CI}$ **於** O_2**，過** O_2 **作** $\overline{O_2 H} \perp \overline{BC}$ **於** H

4. **過** O_2 **作** $\overline{BC}$ **之平行線交** $\overline{BI}$ **於** O_1

5. **分別以** O_1, O_2 **為圓心，** $\overline{O_2 H}$ **長為半徑作圓** O_1 **與圓** O_2 **為所求**

(2) **正三角形**

(3) **與**(1)**作法相同**