北 一 女 中 數 學 挑 戰 甄 選 試 題 (第三期)　90.11.12

1.無窮整數數列$< a_n >$，其中$a_n = (2n^2 - 1)^2$，$n \in N$，

試證: 任意相鄰兩項都互質且平均數都是完全平方數。

2.(A)從 1,2,3,.……,10 等 10 個整數中，任取兩數 a , b，其中一個為奇數，一個為偶數，對 a ,b 兩數我們做下面的操作:

將較大的數減去較小的數得到一個數 c，然後將較小的數乘以 2 得到一個數 d；接著對 c ,d 兩數如同前述 a ,b 兩數一樣操作方式，再得到兩數 e ,f；再繼續這個動作，直到最初的 a ,b 變成 b ,a 為止，此時我們稱 a ,b 為一對好數對。

試問:這 10 個數中有多少對好數對?

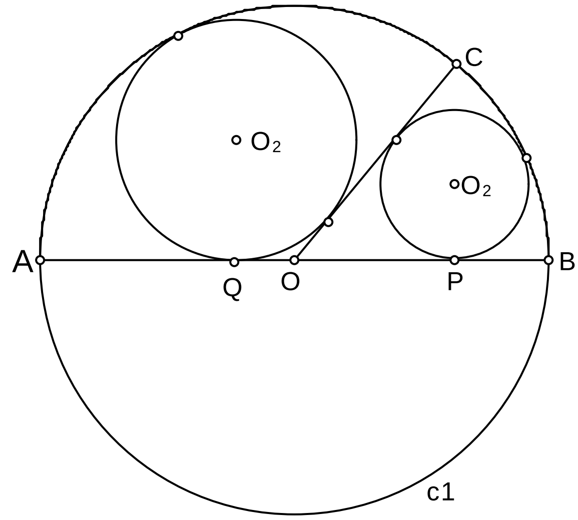
(B)有 10 個盒子，盒子內分別有 1 個球，2 個球，3 個球，.……，10 個球等不同的球數，將這 10 個盒子由左而右任意排成一列。若某個盒子中有 K 個球，可以從比這個盒子內球數多的另一個盒子取出 k 個球放入此盒子內。

試問:是否能經過有限次的取球動作後，這 10 個盒子內的球數，從左到右分別是 10 個球，9 個球，8 個球，.……，1 個球的狀況產生?

3.在一半圓及直徑$\overline{AB}$內作兩圓O_1, O_2，使兩圓與$\overline{AB}$及半圓弧，並與另一半徑$\overline{OC}$均相切，(如圖所示)，

設兩圓O_1, O_2與$\overline{AB}$的切點分別是 P , Q，

試證: $\overline{PQ} \geq (\sqrt{2} - 1)\overline{AB}$



4.**已知一三角形** ABC**，求作**:

(1) **兩等圓**O_1, O_2**，使得圓**O_1**與**$\overline{AB}, \overline{BC}$**均相切，圓**$O_2$**與**$\overline{BC}, \overline{CA}$**均相切，且圓**$O_1$**與圓**$O_2$**相外切。**

(2) **若想作三個等圓，使其兩兩外切且每個圓與**ΔABC**的兩邊相切，則**ΔABC**必須是何種三角形**?

(註:請於 12 月 5 日前將書面報告交至數學挑戰甄選研發小組信箱內)