北一女 挑戰甄選(第二期)參考答案

1. **只要能證明 n 被 7,8 整除即可**

(A) **先證 n 是 8 的倍數**

因為 $4n+1$, $3n+1$ **均為完全平方數，令** $4n+1=a^2$ $3n+1=b^2$ $(a,b\in Z)$

我們可知當 $a^2=4n+1$ **時，** $a^2\equiv 1 \pmod 8$ **,因此** $8\mid 4n$ **,即可知** n **為偶數,**

可由 $b^2=3n+1$ **可知** b **為奇數,且** $b^2\equiv 1 \pmod 8$ **,再者** $n=a^2-b^2$ **,可得** $8\mid n$

(B) **再證 n 是 7 的倍數**

由(A)**中，可得** $4n=(a+1)(a-1)$**，亦可得** $a-1, a+1$ **均為偶數，令** $a-1=2c$,

則 $c=\frac{1}{2}(a-1)$ **為整數 ,可得** $n=\frac{1}{2}(a-1)\cdot\frac{1}{2}(a+1)=c(c+1)$ ——————(1)

另一方面 $3n=(b+1)(b-1)$ **,可知** $b+1$ **與** $b-1$ **中至少有一個為 3 的倍數。**

(i)**若** $b-1=3k$ $(k\in Z)$**,則可得** $n=k(3k+2)$…………..(2)

由(1)**與**(2)**得** $n=c(c+1)=k(3k+2)$

亦即 $4c(c+1)=4k(3k+2)$

$\Rightarrow 4c^2+4c+1=12k^2+8k+1$

$\Rightarrow (2c+1)^2=(2k+1)(6k+1)$

又 $2k+1$,$6k+1$ **的最大公因數為 1，即兩者互質，所以** $2k+1$ **與** $6k+1$ **必均為完全平方數。**

(ii)

若 $k+1=3k$ $(k\in Z)$ **同**(i)**可推得**

$2k-1$ **與** $6k-1$ **均為完全平方數，但我們可知** $6k-1$ **不可能為完全平方數，所以**(ii)**是不可能的，亦即**(i)**的情況必成立，亦即** $2k+1$ **與** $6k+1$ **必均為完全平方數，檢驗** k **被 7 除的餘數，可得到** $k\equiv 0 \pmod 7$ **或** $k\equiv 4 \pmod 7$**，對這兩種情況而言，** $k(3k+2)\equiv 0 \pmod 7$ **亦即** n **必為 7 的倍數。**

由$(A)(B)$**的證明可知：**n **必為 56 的倍數。**

2.

由已知(1) (2)可得

$1 = f(1) = f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) \ge 2f(\frac{1}{2})$，即 $f(\frac{1}{2}) \le \frac{1}{2}$

利用歸納法易得，任意正整數 n， $f(\frac{1}{2^n}) \le \frac{1}{2^n}$

接著當 $a \ge b$ 時

$$f(a) = f((a-b)+b) \ge f(a-b) + f(b) \ge f(b)$$

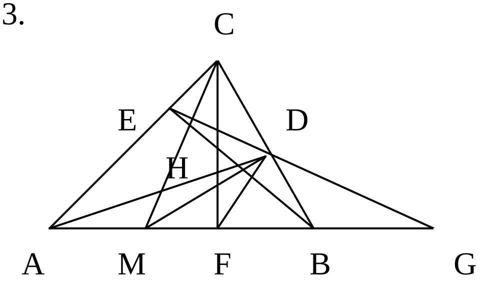
所以可知 f 為增函數，因此，當任意實數 $x \in (0,1)$，我們可找到

一個自然數 n，使 $\frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n}$，

則可得 $f(x) \le f(\frac{1}{2^n}) \le \frac{1}{2^n} < 2x$

此命題得證。

3.



證：(1)**設** H **為** ΔABC **的垂心，易知** C,D,H,E **四點共圓，此圓即圓** O_1

又 ΔADB **為直角三角形，且** M **為中點，所以** $\overline{AM}=\overline{DM}$**，即**

$\angle ADM=\angle DAM=90$**度**$-\angle ABC$**，因此** $\angle ADM=\angle BCF$**，所以** $\overline{MD}$ **為圓**

O_1 **的切線(以** D **為切點)。**

又另一方面 $\angle MDF=\angle MDB-\angle FDB$

又 $\overline{MD}=\overline{MB}$**，所以** $\angle MDB=\angle MBD$**，而且** $\angle CDE=\angle BDG$**，**

且 $\angle CDE=\angle CAB=\angle FDB$ (**因為** $\Delta CDE,\Delta ABC,\Delta FBD$ **相似**)

所以 $\angle MDF=\angle MBD-\angle FDB=\angle MBD-\angle BDG=\angle BGD$

而 $\angle BDG=\angle MGD$

因此 $\angle MDF=\angle MGD$**，所以** $\overline{MD}$**為**ΔDFG **的外接圓的切線，即** $\overline{MD}$**為為圓**

O_2 **的切線，亦即** $\overline{MD}$**為** O_1, O_2 **兩圓的公切線。**

(2)

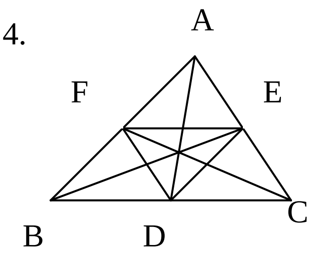
設 O_1 **與** $\overline{CM}$ **交於** L**，由圓冪定理可知** $\overline{ML}\cdot\overline{MC}=\overline{MD}^2=\overline{MF}\cdot\overline{MG}$

亦即 F,G,C,L **四點共圓，因此** $\angle CLG=\angle CFG=90$**度**

所以 $\overline{CL}\perp\overline{CM}$**，又** L **在圓** C_1 **上且** $\overline{CH}$ **為圓** C_1 **直徑**

所以 $\overline{HL}\perp\overline{CM}$**，亦即** $\overline{GH},\overline{HL}$**為 同一直線，因此** $\overline{GH}\perp\overline{CM}$

4.



令 $\overline{AB}=c,\overline{BC}=a,\overline{CA}=b$

對 ΔAEF 而言， $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\dfrac{c}{a+c},\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\dfrac{b}{a+b}$

所以 $\dfrac{\Delta AEF}{\Delta ABC}=\dfrac{bc}{(a+c)(a+b)}$

同理可得 $\dfrac{\Delta BDF}{\Delta ABC}=\dfrac{ca}{(b+a)(b+c)}$

$\dfrac{\Delta CDE}{\Delta ABC}=\dfrac{ab}{(c+b)(c+a)}$

因此可得 $\dfrac{\Delta DEF}{\Delta ABC}=1-(\dfrac{bc}{(a+b)(c+a)}+\dfrac{ca}{(a+b)(b+c)}+\dfrac{ab}{(b+c)(c+a)})$

$=1-\dfrac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=\dfrac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

又由算幾不等式可得

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

$b+c\geq 2\sqrt{bc}$

$c+a\geq 2\sqrt{ca}$

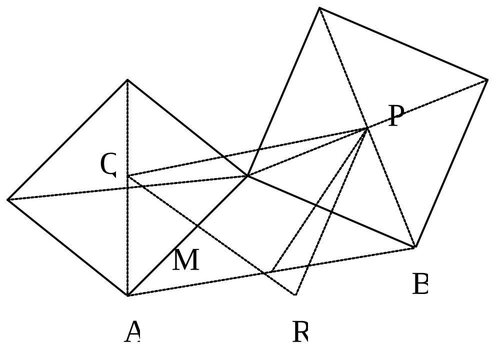
即 $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

所以 $\dfrac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\dfrac{1}{4}$，即 $\dfrac{\Delta DEF}{\Delta ABC}$ 最大值 $\dfrac{1}{4}$

又當 $a=b=c$ 時，等號成立,

即 ΔABC 為正三角形時，ΔDEF 有最大面積。

5.



證明： 利用幾何變換證明

設 r_x **表示以** X **為中心逆時針旋轉** 90 **度的變換，則可推得** $r_x \circ r_y$ **是以線段** $\overline{XY}$ **的中點為中心的反射變換。因此，如上圖，** $r_p \circ r_Q$ **將點** A **變換到** C**，然後再變換到** B **的合成變換，所以** $r_p \circ r_Q$ **是以** $\overline{AB}$ **的中點為中心的反射變換，又因為在** r_Q **變換下，** Q **點位置不變，再經** r_p **之後** Q **變換到** M **為中心** Q **的反射點位置** R**，所以可知** $DPQR$ **為直角三角形且** $\overline{PQ} = \overline{PR}$**，即** $DPQR$ **為等腰直角三角形。**