北 一 女 中 數 學 挑 戰 甄 選 試 題（第二期） 90.10.12

1. 證明：任意正整數 n，如果 3n+1 與 4n+1 都是完全平方數，則 n 是 56 的倍數。

2. 設函數 f 為定義於 $[0,1]$ 區間上的實值函數，(即 f:A$\to$R , A=$\{x \mid 0\le x\le 1\}$)

   若 f 滿足下列兩條件：

   (1) $f(1)=1$ 且 $f(x)$ 均為非負實數。

   (2) 任意 $a\ge 0, b\ge 0$，且 $a+b\le 1$，不等式 $f(a+b)\ge f(a)+f(b)$ 恆成立

   試證：$f(x)<2x$ ，任意 $x\in(0,1]$

3. 設 ΔABC 為銳角三角形，且 $\overline{CA}>\overline{CB}$；$\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$ 為三高，而 D,E,F 分別為 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 上的垂足，且 M 為 $\overline{AB}$ 邊上的中點，又 $\overline{AB}$ 與 $\overline{ED}$ 兩直線的交點為 G，若圓 O_1，圓 O_2 分別為 ΔCDE 與 ΔDFG 的外接圓，

   證明：(1) $\overline{MD}$ 是圓 O_1 與圓 O_2 的公切線

   (2) $\overline{GH}\perp\overline{CM}$ ，其中 H 為 ΔABC 的垂心

4. 已知 ΔABC 的三條角平分線 $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$，分別交 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 三邊於 D,E,F，

   求 ΔDEF 與 ΔABC 的面積比之最大值，並求有最大值時之條件。

5. 任意三角形 ABC，以 $\overline{AB},\overline{AC}$ 兩邊為邊各自向外作一正方形，若 P,Q 兩點分別是兩正方形的中心，且 R 為 $\overline{BC}$ 的中點，則 ΔPQR 為等腰直角三角形，試證明之。

(註：請於 11 月 5 日前將書面報告交至數學挑戰甄選研發小組信箱)