北一女 挑戰甄選(第一期)參考答案

1. ① 當 $y=1$ 時，由(ii) $f(x)=f(x)f(1)-f(x+1)+1$
   可得 $f(x+1)=f(x)+1$

   ② 由歸納法易得任意整數 n， $f(n)=n+1$

   ③ 對任意整數 m 及非零整數 n，由(ii)可得

   $f(\frac{m}{n})=f(m)f(\frac{1}{n})-f(m+\frac{1}{n})+1$，由②及①，因此

   $f(\frac{m}{n})=(m+1)f(\frac{1}{n})-(m+f(\frac{1}{n}))+1=mf(\frac{1}{n})-m+1$

   ④ $f(\frac{1}{n})=f(1\cdot\frac{1}{n})=f(1)f(\frac{1}{n})-f(1+\frac{1}{n})+1=2f(\frac{1}{n})-f(1+\frac{1}{n})+1$

   得 $f(\frac{n+1}{n})=f(\frac{1}{n})+1$，再由③

   得 $f(\frac{n+1}{n})=(n+1)f(\frac{1}{n})-n=f(\frac{1}{n})+1$

   即 $f(\frac{1}{n})=1+\frac{1}{n}$ 代入③得 $f(\frac{m}{n})=m(1+\frac{1}{n})-m+1=\frac{m}{n}+1$

   因此可得 $f(x)=x+1$，對任意有理數 x

   ⑤檢驗 $f(x)=x+1$，對任意有理數 x，可知它滿足$(i),(ii)$。

2. 設 A 認識 m 個人，他們是 $C_1,C_2\ldots\ldots C_m$，因為 A ， B 沒有共同的熟人，所以 $C_1,C_2\ldots\ldots C_m$ 與 B 都不認識。
   就 C_k 而言，$k=1,2,\ldots..m$ ，B 與 C_k 恰有兩個共同的熟人，設 D_k 是他們的熟人，則 D_k 不是 A，且 D_k 與 A 都不認識。
   如果在 $D_1,D_2,\ldots\ldots D_k$ 中有兩個人相同，不妨設 $Di=i\neq j$，此時 Di 與 A 都認識 B ,Ci,Cj 此結果與已知矛盾，所以 D_k，$k=1,2,\ldots..m$ 都不相同，即 B 認識的人不少於 A 認識的人，同理可證 A 認識的人不少於 B 認識的人，因此，可確定 A, B 認識的人一樣多。

3. 對 $1\le i\le 1000$，令 $a_i=2i-1$ ， $b_i=2001-a_i$ 則當 $E_i=\{a_i,b_i\}$時，任意 $i\ne j$ ，

$E_i\cap E_j=$空集合且 $\bigcup_{i=1}^{1000} E_i=A$。又任意 $1\le i\le 1000, E_i\not\subset B$ 且 B 的元素與所有 E_i的個數都是 1000，因此，B 必恰好包含每個 E_i中的一個元素。

設 B 中奇數共有 n 個，對 $1\le i_1<i_2<......<i_n\le 1000$而言，令 $a_{it}=a_{it}, t=1,2,.....n$ 則任意 $1\le j\le 1000$ $j\ne a_i$ 而言 $a_j=b_j$ 因此

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}+\sum_{j\ne i_t} b_j=1000800----(1)$$
$$\sum_{j=1}^{1000} bj=2\sum_{j=1}^{1000} j=1001000-----(2)$$

由(2)−(1)得 $\sum_{t=1}^{n} b_{it}-\sum_{t=1}^{n} a_{it}=200$

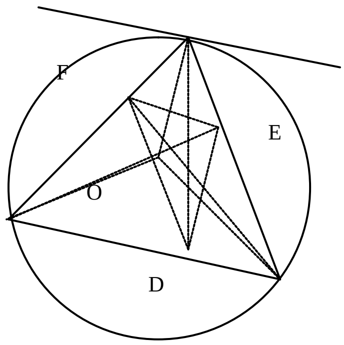
即 $\sum_{t=1}^{n} 200(-a_{it})-\sum_{t=1}^{n} a_{it}=200$

亦即 $2001n-2\sum_{i=1}^{n} a_{it}=200$

所以 $\sum_{t=1}^{n} a_{it}=\frac{1}{2}(2001n-200)$，可知 n 為偶數

此時 $\frac{1}{2}(2001n-200)$為偶數個奇數，所以 n 為 4 的倍數.

4.



ΔABC為銳角三角形時其外心必在圓內令O為外心,於是

$S\Delta ABC = S$平行四邊形$AEOF + S$平行四邊形$CEOD + S$平行四邊形$DOFB$
(其中S指三角形與四邊形的面積)

(1)若$\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$為三高時,知$B, C, E, F$四點共圓,因此$\angle AFE = \angle BCE$,過 A作圓的切線$\overline{PQ}$,則$\angle PAB = \angle BCE$,因此$\angle PAB = \angle AFE$,可得$\overline{AP} // \overline{EF}$,又$\overline{AP}$為切線,所以
$\overline{AO} \perp \overline{AP}$,即$\overline{AO} \perp \overline{EF}$,

因此S平行四邊形$AEOF = \dfrac{1}{2}\overline{AO} \cdot \overline{EF}$,$S$平行四邊形$DOFB = \dfrac{1}{2}\overline{CO} \cdot \overline{DE}$

S平行四邊形$DOFB = \dfrac{1}{2}\overline{CO} \cdot \overline{FD}$,又$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = R$,所以$S\Delta ABC = \dfrac{1}{2}R(\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD})$

(2)若

$\Delta ABC = \dfrac{1}{2}R(\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD})$,欲證$\overline{AD, BE}, \overline{CF}$為三高,

首先證$\overline{OA} \perp \overline{EF}$,若$\overline{OA}$不垂直$\overline{EF}$,

則 S平行四邊形$OEAF < \dfrac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{EF}$,

又S平行四邊形$OFBD \le \dfrac{1}{2}\overline{OB} \cdot \overline{DF}$,

S平行四邊形$ODCF \le \dfrac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{EF}$,

因此 $S\Delta ABC < \dfrac{R}{2}(\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD})$與已知矛盾,

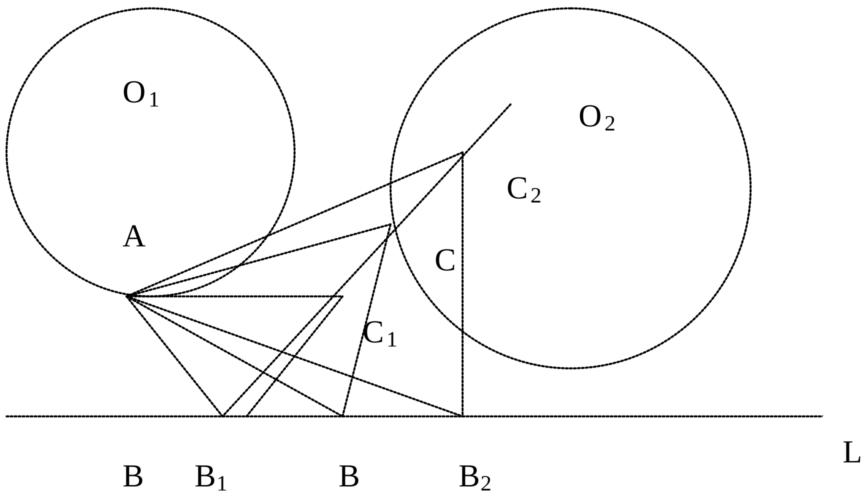
所以$\overline{OA} \perp \overline{EF}$,同理$\overline{OB} \perp \overline{DF}$, $\overline{OC} \perp \overline{DE}$,

過A作外接圓的切線$\overline{PQ}$,則$\overline{OA} \perp \overline{PQ}$,又$\overline{OA} \perp \overline{EF}$,

所以$\overline{PQ} // \overline{EF}$,可得$B, C, E, F$四點共圓,

同理A, B, D, E四點共圓,C, A, F, D亦共圓,可推得$\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$為三高

5.



解：如上圖

1. **在圓** O_1 **上任取一點** A
2. **在** L **上任取兩點** B_1, B_2
3. **作正** DAB_1C_1 **與正** DAB_2C_2
4. **連接** $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ **設交圓** O_2 **於** C，**交** L **於** P
5. $DABC$ **即為所求**

證明：

1. $\because DAB_1C_1$ **與** DAB_2C_2 **均為正** D

   $\therefore \overleftrightarrow{C_1C_2}$**與**$L$**夾**60**度角**

2.**在** L **上取** B'**點使** $\angle CAB' = 60$**度**， **則** A, P, B', C **四點共圓**

$\therefore \angle ACC_1 = \angle AB'B_2$ ———————————(1)

3. $\because \angle B'AC = 60\text{度} = \angle B_1AC_1$
$\therefore \angle B_1AB' = \angle C_1AC$ ————————————(2)

4. **又** $\overline{AB_1} = \overline{AC_1}$ —————————————(3)

由(1)(2)(3) $\Delta AB_1B' \cong \Delta AC_1C(AAS)$

$\therefore \overline{AB'} = \overline{AC}$

$\therefore \Delta AB'C$ **為正** Δ

$\therefore B' = B$

5. **由** 4 **知** $DABC$ **即為所求**