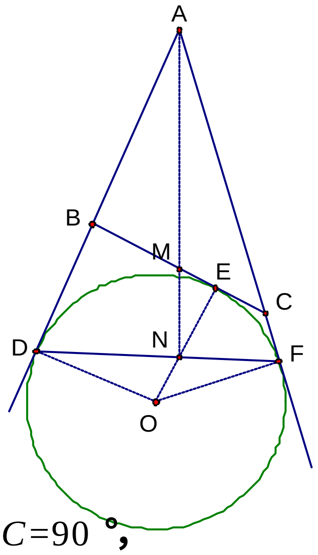
北一女 挑戰甄選(第十一期)參考答案

一.如右圖， O **為**$\triangle ABC$ **的旁心，** D,E,F **為圓與三邊相切的切點，**

設 $\overline{AN}$**與**$\overline{BC}$**相交於**M **，** M **為** $\overline{BC}$ **上，**



所以 $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}}=\dfrac{DABM\text{面積}}{DACM\text{面積}}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAN}{\overline{AC}\cdot\sin\angle CAN}$

由正弦定理可得： $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}$

所以 $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}}=\dfrac{\sin\angle ACB\cdot\sin\angle BAN}{\sin\angle ABC\cdot\sin\angle CAN}$ ……①

因為$\angle ODB=\angle OEB=90°$，$\angle OEC=\angle OFC=90°$**，**

所以 O,D,B,E **四點共圓且** O,F,C,E **四點也共圓，**

因此$\angle DON=\angle ABC$**，**$\angle FON=\angle ACB$**，**

又 $\dfrac{\overline{DN}}{\overline{NE}}=\dfrac{DADN\text{面積}}{DAFN\text{面積}}=\dfrac{\overline{AD}\cdot\sin\angle ADN}{\overline{AF}\cdot\sin\angle AFN}$

且 $\dfrac{\overline{DN}}{\overline{NE}}=\dfrac{\overline{OD}\cdot\sin\angle DON}{\overline{OF}\cdot\sin\angle FON}=\dfrac{\overline{OD}\cdot\sin\angle ABC}{\overline{OF}\cdot\sin\angle ACB}$

且 $\overline{AD}=\overline{AF}$,$\overline{OD}=\overline{OF}$,**所以**$\dfrac{\sin\angle BAN}{\sin\angle CAN}=\dfrac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}$ ……②

由①,②**兩式，即得** $\overline{BM}=\overline{CM}$,**即**$\overline{AN}$**平分線段**$\overline{BC}$**。**

二.欲證數列〈$\left[n\sqrt{2}\right]$〉中有無窮多個完全平方數

因為 $(\sqrt{2}+1)^m = a_m\sqrt{2}+b_m$ 且 $(\sqrt{2}-1)^m = a_m\sqrt{2}-b_m$ $a_m, b_m \in N$

則 $(\sqrt{2}+1)^m(\sqrt{2}-1)^m = 2a_m^{\ 2} - b_m^{\ 2}$ 即 $2a_m^{\ 2} - b_m^{\ 2} = 1$

因此 $2a_m^{\ 2} = 1 + b_m^{\ 2}$,即 $b_m^{\ 2} < 2\,a_m^{\ 2}$

又 $b_m^{\ 4} = b_m^{\ 2}\cdot b_m^{\ 2} < 2a_m^{\ 2}\cdot b_m^{\ 2} = (b_m^{\ 2}+1)(b_m^{\ 2}) < (b_m^{\ 2}+1)^2$

所以 $b_m^{\ 2} < \sqrt{2}a_m b_m < b_m^{\ 2}+1$

即可得 $\left[\sqrt{2}a_m b_m\right] = b_m^{\ 2}$

取 $n = a_m b_m$ 時，即得 $\left[n\sqrt{2}\right] = b_m^{\ 2}$

因為 b_m 有無窮多個，所以 $\left[n\sqrt{2}\right]$ 有無窮多個，此命題得 證。

三.(1) P_{10}為 1,2,3,……,9,10 的任一重排

顯然在 P_{10}中，與 5 相鄰的最大數為 10，最小數為 1，

所以〝與 5 相鄰的數〞與 5 的差的絕對值不超過 5，所以 $M_{10} \le 5$。

另一方面，當 P_{10}為 6,1,7,2,8,3,9,4,10,5 時，

此時 $M_{10} = 5$，所以 M_{10}的最大值為 5。

(2) P_n為 1,2,3,……,n–1,n 的任意重排

(i)當 n 為偶數時，令 n=2k，同(1)的討論可知 $M_n \le k$

而當 P_n為 k+1,1,k+2,2,k+3,3,……,–2k–1,k 的重排時，

$M_n = k$，所以 M_n的最大值為 $k = \frac{n}{2}$

(ii)當 n 為奇數時，令 n=2k+1，則與 k+1 相鄰的數，

他與 k+1 之差的絕對值不超過 k，即可知 $M_n \le k$

又當 P_n為 2k+1,k+1,1,k+2,2,……,2k,2 的重排時，

$M_n = k$，因此 M_n的最大值 $k = \left[\frac{n}{2}\right]$

所以，任意自然數 n，M_n的最大值$= \left[\frac{n}{2}\right]$