

## 北一女中數學挑戰甄答題（第十一期）

1. 設  $\triangle ABC$  中， $\angle A$  的分角線與  $\angle B$ 、 $\angle C$  兩外角的分角線交於  $O$ ，過  $O$  作  $\triangle ABC$  的三邊（或邊的延長線） $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$  的垂線，其垂足依序為  $D$ 、 $E$ 、 $F$ 。又  $N$  為  $\overline{DF}$  與  $\overline{OE}$  的交點。試證：直線  $AN$  平分線段  $\overline{BC}$ 。

2. 已知下列命題成立：

當  $m$  為任意正整數且  $(\sqrt{2}+1)^m = a_m \sqrt{2} + b_m$ ， $a_m$ 、 $b_m$ ，為兩自然數時， $(\sqrt{2}-1)^m = a_m \sqrt{2} - b_m$ 。

試證：數列  $[\sqrt{2}]$ ， $[2\sqrt{2}]$ ， $[3\sqrt{2}]$ ， $[4\sqrt{2}]$ ， $\dots$ ， $[n\sqrt{2}]$ ， $\dots$  中有無窮多個完全平方數。

3. (1) 設  $P_{10}$  為  $1, 2, \dots, 10$  等 10 個數的任意排列，而  $M_{10}$  為  $P_{10}$  中兩個相鄰元素的差的絕對值的最小值，求  $M_{10}$  的最大值。

(2) 若(1)中的 10 個數改為  $n$  個數， $n \geq 2$ ，則  $M_n$  的最大值為何？