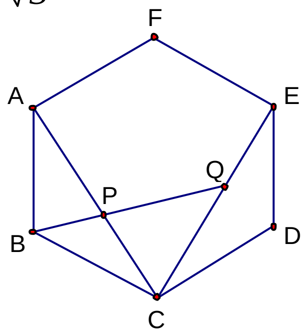
北一女 挑戰甄選(第十期)參考答案

一.不失一般性假設 $\overline{AB}=1$ 則可推得 $\overline{AC}=\overline{EC}=\sqrt{3}$



又 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 所以 $\overline{AP}=1$,同理 $\overline{CQ}=1$

因此 $\overline{CP}=\sqrt{3}-1$,又 $\angle PCQ=60°$，

由餘弦定理可得

$$\overline{PQ}^2=\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2-2\cdot\overline{CP}\cdot\overline{CQ}\cdot\cos 60°$$

$$=(\sqrt{3}-1)^2+1-2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{2}=6-3\sqrt{3}$$

所以 $\overline{PQ}=\sqrt{6-3\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{6(4-2\sqrt{3})}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}-1)$

由正弦定理可得(△CPQ 中)

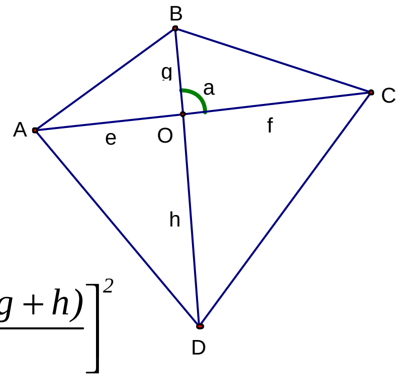
$\dfrac{\overline{PQ}}{\sin 60°}=\dfrac{\overline{CQ}}{\sin\angle CPQ}$ 即得 $\sin\angle CPQ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}$

由此得 $\sin\angle CPQ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 又∠CPQ＜90°

所以∠CPQ＝75°，又 $\overline{AB}=\overline{AM}=1$ 且 $\angle BAP=30°$

所以∠APB＝75°，由此可知 B,P,Q 三點共線。

二.(1)如右圖所示，易知四邊形面積



$$1=ABCD=\frac{1}{2}(eg+gf+fh+he)\cdot\sin a$$

$$\le\frac{1}{2}(eg+gf+fh+he)$$

$$=\frac{1}{2}(e+f)(g+h)\le\frac{1}{2}\left[\frac{(e+f)+(g+h)}{2}\right]^2$$

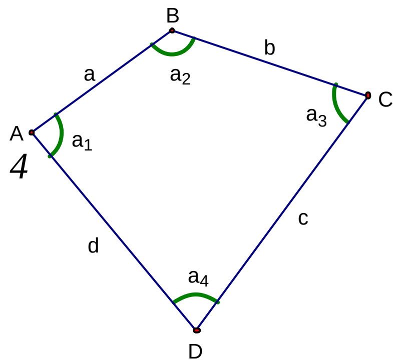
(2)如右圖，

1＝ABCD 的面積

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(da\cdot\sin a_1+ab\cdot\sin a_2+bc\cdot\sin a_3+cd\cdot\sin a_4\right)\right]$$

$$\le\frac{1}{4}\left(da+ab+bc+cd\right)=\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

$$\le\frac{1}{4}\left[\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right]^2$$ ，即得 $a+b+c+d\ge 4$



所以四邊形 ABCD 其面積為 1 時，

其四邊形及兩對角線長之和 $\le 4+2\sqrt{2}$

三.設 $P_1,P_2,P_3,\cdots\cdots,P_n$ 依逆時鐘方向依序分布在圓上，則依題設的方式操作(必須從

P_1 開始)，且逐一的往 $P_2,P_3,\cdots\cdots$ 操作下去，我們可以得到下列的點所得到的對應的數如下：

$$*\quad\begin{array}{cccccccc} P_1, & P_2, & P_3, & \cdots\cdots, & P_{n-3}, & P_{n-2}, & P_{n-1}, & P_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

(1)當 n=2002 時，上列中有 2001 個 1，可以連續地，每 3 個一組，分割成 667 組，

而留下單獨的一個數 0，這時候對這 667 組各操作一次，可將 2001 個 1 都變成 0，所以 2002 個位置最後都是 0。

(2)當 n=3k+1 時，如(1)的方式分割成 k 組，最後所有的位置都是 0。

當 n=3k+2 時，對＊的方式，以 P_{n-1} 為主再操作一次，即得 111…100 的形式，這時候前面的 3k 個 1，依序每 3 個一組，就可將所有位置都變成 0。

當 n=3k 時，我們以 a_i 表示以P_i為主，數字改變的次數，又由於以 P_1,P_2,P_3為主改變一次數字時，P_2位置的數字必然都會改變一次，所以 $a_1+a_2+a_3$的和，就是 A_2 位置數字改變的次數，那麼，當 $S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

(A)如果要將所有位置上的數都變成 0，則 S 必為奇數(因為 P_1位置必須改變奇數次，其餘的位置改變偶數次)

(B)又 $a_1+a_2+a_3$,$a_4+a_5+a_6$,$\cdots$,$a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}$這 k 組三個數的和都是偶數(因為 $P_2,P_5,P_8,\cdots,P_{3k-1}$的每個位置必須改變偶數次)，所以 S 為一偶數。

此時(A)與(B)是矛盾的結果，所以當 n=3k 時，不可能將所有位置的數都變成 0。