北一女中數學挑戰甄選試題(第一期)　90.9.12

1. 設 Q 表所有有理數(即分數與整數)的集合，求滿足下列兩條件的從 Q 到 Q 的函數：(1) $f(1)=2$

   (2) $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$ ，對所有實數 x，y 都成立

2. 有 n 個選手參加數學競試，其中有些選手互相認識，並且兩個不相識的選手都恰有兩個共同的熟人。若選手 A 與 B 認識，且沒有共同的熟人，則他們(即 A 與 B)認識的人一樣多，試證明之。

3. 設兩集合 A={1,2,3,……,2000}，B=$\{a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots,a_{1000}\}\subset$A，且 B 有 1000 個不同的元素，若 B 滿足下列兩條件:

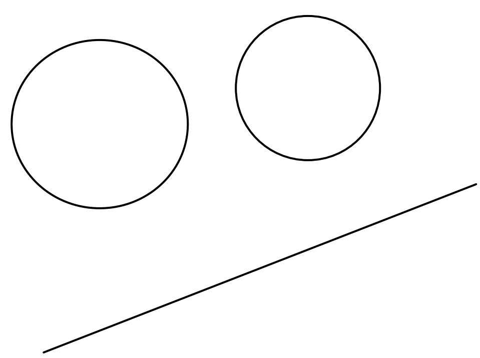
   (1)$a_i+a_J\neq 2001$，其中$1\le i<j\le 1000$　　(2)$\sum_{k=1}^{1000}a_k$ =1000800

   則 B 中的元素為奇數的個數必為 4 的倍數，試證明之；並求$\sum_{k=1}^{1000}a_k^2$ 之值。

   (註:$\sum_{k=1}^{n}x_k=x_1+x_2+\ldots\ldots\ldots+x_n$)

4. 已知銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 R，且點 D,E,F 分別在$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$上，證明:$\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$是三條高的充要條件是$s=\frac{R}{2}(\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD})$，其中s是$\Delta$ABC的面積。

5. 在已知兩圓及一直線(如右圖)上，各取一點，使三點形成一個正三角形



“ 請於 10 月 5 日前以書面報告方式交至挑戰甄選研發小組信箱”