北一女中 94 學年度**數學科**能力競試初賽題目及參考答案

一、方程組$\begin{cases} x+xy+y=1 \\ x^2+x^2y^2+y^2=17 \end{cases}$的實數解（x,y）=？

【參考答案】：$(x,y)=\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2},\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) or \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2},\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$。

二、已知“若三個大於 3 的質數 a,b,c 滿足關係式 2a+5b=c，則 a+b+c 是 n 的倍數。”
試問，整數 n 的最大可能值是多少？並證明你的結論。

【參考答案】：n=9

三、已知多項式 $\boldsymbol{f(x)=a_{2005}x^{2005}+a_{2004}x^{2004}+\cdots+a_1x+a_0}$，存在正整數 p、q、r，
且 $\boldsymbol{p<q<r}$，滿足$\boldsymbol{f(p)=q}$，$\boldsymbol{f(q)=r}$，$\boldsymbol{f(r)=p}$，證明多項式 $f(x)$有一個係數不是整數

【參考答案】：略

四、(1) 如果給定 xy 平面上的 94 條相異直線，試具體找出使得它們恰好有 1633 個交點的方式？**(請寫出此 94 條直線的方程式)**

(1) 承(1)，若交點個數改成 2005 個，方法爲何？

【參考答案】： (1)$\because 1633=71\times 23$，$\therefore$考慮兩組相異平行線，其中一組有 71 條平行線；另一組有 23 條平行線即可，則這兩組平行線有恰好有 1633 個交點。
如：$x=1,2,...,71$；$y=1,2,...,23$

(2)略

五、如圖，E，F 分別在邊長爲 1 的正方形 $ABCD$ 的兩邊 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 上，且

$\overline{BE}\cdot\overline{BF}=2\overline{AE}\cdot\overline{CF}$，$\overline{AC}$ 分別與$\overline{DE}$, $\overline{DF}$ 交於 P, Q。試證明：(1)$\angle ADE+\angle CDF$ $=45°$ (2) B, E, P, Q, F五點共圓。

【參考答案】：略