# 台北市立第一女子高級中學　九十三學年度數學科競試考題

高二、高三組試卷

複賽試卷（二）

1. 設四角錐 P－$ABCD$ 的底面是一矩形，$\Delta PAD$ 為一正三角形，且平面 $PAD$ 與四角錐的底面 $ABCD$ 垂直，

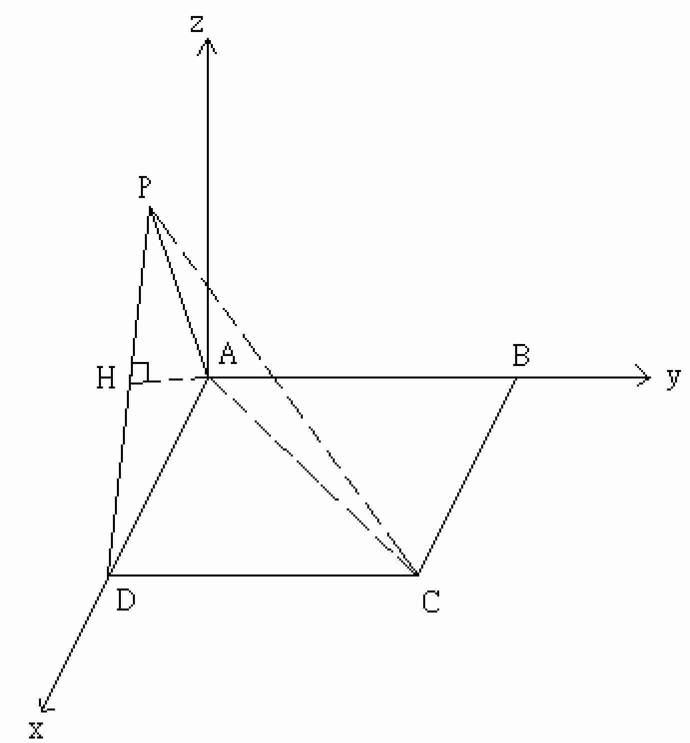
(1) 證明：$\Delta PAD$ 過 $A$ 的高是平面 $PCD$ 的垂線。

(2) 若矩形 $ABCD$ 為正方形，則兩平面 $APC$ 與 $DPC$ 的夾角正弦值為何？

解：

(1) 過 $A$ 點對 $\overline{PD}$ 作垂線，設 $H$ 為垂足。顯然 $\overline{AH} \perp \overline{PD}$。

又，平面 $PAD$ 與平面 $ABCD$ 垂直，所以其兩面角為 $90°$。又直線 $CD$ 與兩平面之交線 $AD$ 垂直，所以 $\overline{CD}$ 與平面上 $APD$ 垂直。$\overline{AH}$ 在平面 $PAD$ 上所以 $\overline{AH} \perp \overline{CD}$。




因為 $\overline{AH} \perp \overline{PD}$、$\overline{AH} \perp \overline{CD}$，所以 $\overline{AH}$ 與平面 $PCD$ 垂直。

(2) 將圖置於空間坐標中，不妨假設正方形 $ABCD$ 的邊長為 1。

不妨設 A 為(0,0,0)、B 為(0,1,0)、C 為(1,1,0)、D 為(1,0,0)、P 為 $(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$。

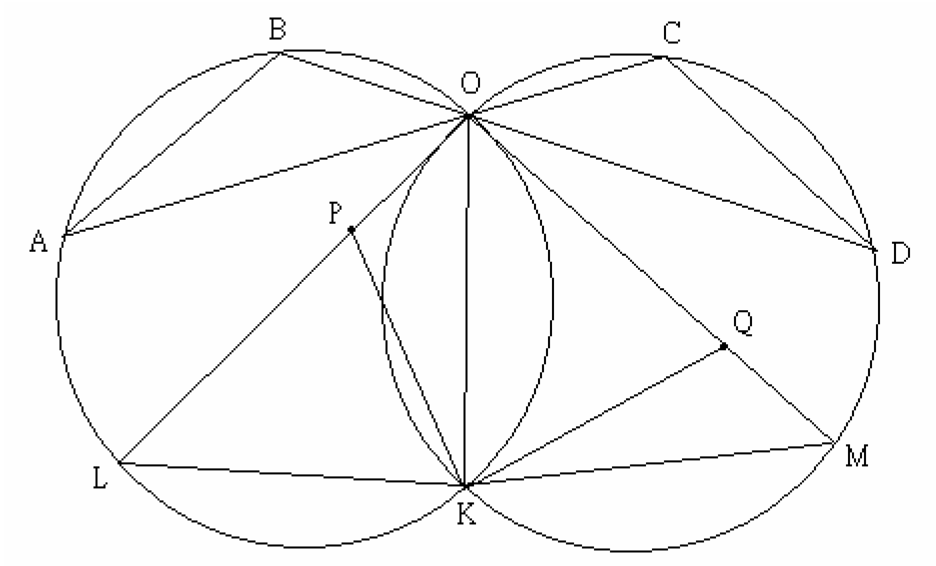
則可得平面 $DPC$ 的方程式為 $\sqrt{3}x + z = \sqrt{3}$，法向量為 $\vec{n}_1 = (\sqrt{3},0,1)$。

平面 $APC$ 的方程式為 $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y - z = 0$，法向量為 $\vec{n}_2(\sqrt{3},-\sqrt{3},-1)$。

若兩個法向量夾角為 $\theta$，則 $\cos\theta = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{6}{7}} = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$。

2. 圓內接四邊形 $ABCD$ 的兩條對角線相交於點 $O$，設 $\Delta ABO$ 和 $\Delta CDO$ 的外接圓分別為圓 $S_1$ 和圓 $S_2$，他們的交點為 $O$ 和 $K$，過點 $O$ 分別作 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的平行線，他們分別與圓 $S_1$ 和圓 $S_2$ 交於點 $L$ 和 $M$，在 $\overline{OL}$ 和 $\overline{OM}$ 上取點 $P$ 和 $Q$，使得 $\overline{OP}:\overline{PL}=\overline{MQ}:\overline{QO}$。證明：$O$、$P$、$K$、$Q$ 四點共圓。

解：




$$
\begin{aligned}
\angle LOK &= \frac{1}{2}\text{弧}LK = \frac{1}{2}(\text{弧}AK - \text{弧}AL) \\
&= \frac{1}{2}(\text{弧}AK - \text{弧}OB) \qquad \text{（因為 } \overline{AB}\,//\,\overline{OL}\text{）} \\
&= \angle AOK - \angle BAO \\
&= \angle AOK - \angle ODC \qquad \text{（因為 A、B、C、D 四點共圓）} \\
&= \angle KDC - \angle ODC \qquad \text{（因為 O、K、D、C 四點共圓）} \\
&= \angle KDO = \angle KMO
\end{aligned}
$$

同理：$\angle MOK = \angle OLK$

所以 $\Delta OLK \sim \Delta MOK$

又，$\overline{OP}:\overline{PL}=\overline{MQ}:\overline{QO}$，所以 $\Delta OPK \sim \Delta MQK$。

故 $\angle OPK = \angle MQK$，即可得 O、P、K、Q 四點共圓

3. (1)試證：不存在一完全平方數，其百、十、個位數字依次為 1、2、5。
(2)試證：滿足百、十、個位數字依次為 5、2、1 的完全平方數有無限多個。

解：

(1) 設$n^2=1000k+125$，則$n^2\equiv 5 \pmod 8$

但完全平方數除以 8 之後所得的餘數只可能是 0、1、4，不可能是 5。
所以不存在這樣的完全平方數。

(2) 設$n^2=1000k+521$。

因為個位數字為 1，所以 $n$ 的個位數字只可能是 1 或 9。

不妨設$n=10a+1$，則$n^2=100a^2+20a+1$，觀察其十位數字可知 $2a$ 的個位數字為 2，所以 $a$ 的個位數字為 1 或 6。不妨設為 1，則$n=100m+11$。

則$n^2=10000b^2+2200b+121$，觀察其百位數字可知$2b+1$的個位數字為 5，所以 $b$ 的個位數字為 2 或 7。不妨設為 2，則$n=1000m+211$。

$$n^2=1000000m^2+422000m+42521=1000(1000m^2+422m+42)+521$$

不同的 $m$ 可得到不同的完全平方數$n^2$，其百、十、個位數字均依次為 5、2、1，所以這樣的完全平方數有無限多個。

4. 設 $a$、$b$、c 為正數，$a+b+c=1$，試證：$\dfrac{a}{2b+c}+\dfrac{b}{2c+a}+\dfrac{c}{2a+b}\geq\dfrac{1}{3}+2\sqrt[3]{abc}$。

解：由柯西不等式：

$$\left[\left(\sqrt{\frac{a}{2b+c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{2c+a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{2a+b}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{2b+c}\right)^2+\left(\sqrt{2c+a}\right)^2+\left(\sqrt{2a+b}\right)^2\right]$$

$$\geq\left[\left(\sqrt{\frac{a}{2b+c}}\right)\left(\sqrt{2b+c}\right)+\left(\sqrt{\frac{b}{2c+a}}\right)\left(\sqrt{2c+a}\right)+\left(\sqrt{\frac{c}{2a+b}}\right)\left(\sqrt{2a+b}\right)\right]^2$$

$$=\left[\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right]^2=(a+b+c)+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$$

$$=1+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$$

$$\geq 1+2\times 3\sqrt[3]{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}}=1+6\sqrt[3]{abc}$$

所以$\dfrac{a}{2b+c}+\dfrac{b}{2c+a}+\dfrac{c}{2a+b}\geq\dfrac{1+6\sqrt[3]{abc}}{3(a+b+c)}=\dfrac{1}{3}+2\sqrt[3]{abc}$