台北市立第一女子高級中學　九十三學年度數學科競試考題

高二、高三組試卷詳解

試卷（一）

填充題

1. $[x]$表示不大於 x 的最大整數$(x \in R)$。
   試求滿足$[x]+[2x]+[3x]+[4x]=2004$之 x 的範圍。__________

解：令 $f(y)=[y]+[2y]+[3y]+[4y]$，顯然 $f(y)$遞增。

考慮 0、1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{3}{4}$這幾個分界點：

$0 \le y < \frac{1}{4}$，則 $f(y)=0+0+0+0=0$；

$\frac{1}{4} \le y < \frac{1}{3}$，則 $f(y)=0+0+0+1=1$；

$\frac{1}{3} \le y < \frac{1}{2}$，則 $f(y)=0+0+1+1=2$；

$\frac{1}{2} \le y < \frac{2}{3}$，則 $f(y)=0+1+1+2=4$；

$\frac{2}{3} \le y < \frac{3}{4}$，則 $f(y)=0+1+2+2=5$；

$\frac{3}{4} \le y < 1$，則 $f(y)=0+1+2+3=6$。

所以只有當$200\frac{1}{2} \le y < 200\frac{2}{3}$時，$f(y)=200+401+601+802=2004$。

2. 數列$\langle x_n \rangle$滿足$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{k+1}={x_k}^2+x_k$，求

高斯值$\left[\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_{203}+1}\right]=$__________。

解：由題目條件易知數列$\langle x_n \rangle$遞增，且可得$x_2=\frac{3}{4}$、$x_3=\frac{21}{16}$。

所以$x_{204}>x_3>1$，$0<\frac{1}{x_{204}}<1$。

因為$x_{k+1}=x_k{}^2+x_k$，所以$\dfrac{1}{x_{k+1}}=\dfrac{1}{x_k{}^2+x_k}=\dfrac{1}{x_k\left(x_k+1\right)}=\dfrac{1}{x_k}-\dfrac{1}{x_k+1}$，

則$\dfrac{1}{x_k+1}=\dfrac{1}{x_k}-\dfrac{1}{x_{k+1}}$。

$$\left[\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_{203}+1}\right]$$

$$=\left[\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{x_{203}}-\frac{1}{x_{204}}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{204}}\right]=\left[2-\frac{1}{x_{204}}\right]=1$$

3. 若 n 為完全平方數，且將 n 的個位數字與十位數字刪除之後所得的數仍是一個完全平方數，但 n 的個位數與十位數不全為 0，則此自然數 n 的最大值為__________。

解：設$n=m^2=100k^2+10a+b$，$0\le a,b\le 9$、$a\ne 0$或$b\ne 0$。

$100>10a+b=m^2-100k^2=(m+10k)(m-10k)\ge 20k\cdot(m-10k)$。

若$m-10k\ge 2$

4. 設$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$為分母 60 的既約分數（即分子、分母互質），且$0<a_i<1$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$。則$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{a_i\pi}{2}\right)^2=$__________。

解：小於 60 又與 60 互質的正整數有 1、7、11、13、17、19、23、29 這 8 個數以及 59、53、49、47、43、41、37、31 這 8 個數。所以共有 16 個a_i。而且這 16 個a_i共可兩個兩個配成 8 組，讓每組的兩個a_i知和均為 1。

又，$\left(\cos\dfrac{a_i\pi}{2}\right)^2+\left(\cos\dfrac{(1-a_i)\pi}{2}\right)^2=\left(\cos\dfrac{a_i\pi}{2}\right)^2+\left(\sin\dfrac{a_i\pi}{2}\right)^2=1$。

所以$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{a_i\pi}{2}\right)^2=8\times\left(\cos\frac{a_i\pi}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{(1-a_i)\pi}{2}\right)^2=8\times 1=8$

5. 求$(u-v)^2+(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v})^2$在$0<u<\sqrt{2}$、$v>0$的條件下之極小值。______

解：令 $f(u,v)=(u-v)^2+(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v})^2$

$=\left(u,\sqrt{2-u^2}\right)$和$\left(v,\frac{9}{v}\right)$這兩個點的距離的平方，

而且這兩個點都在第一象限。

所以只需考慮$x^2+y^2=2$和$xy=9$這兩個圖形間的最短距離即可。

設(x_1,y_1)在$x^2+y^2=2$上、(x_2,y_2)在$xy=9$上，

則$x_1+y_1\le\sqrt{\left(x_1{}^2+y_1{}^2\right)\left(1^2+1^2\right)}=2$（柯西不等式）；

且$x_2+y_2\ge 2\sqrt{x_2y_2}=6$（算幾不等式），

故$\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]\left(1^2+1^2\right)\ge\left[(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\right]^2$（柯西不等式）。

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\ge\frac{1}{2}\left[(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\right]^2$$
$$\ge\frac{1}{2}[2-6]^2=8$$

等號成立在$(x_1,y_1)=(1,1)$、$(x_2,y_2)=(3,3)$的情形下，即$(u,v)=(1,3)$。