

台北市立第一女子高級中學 九十三學年度數學科競試考題

高一組試卷

填充題

1. 在一個二位數中間插入一位數，會變成三位數（例如 75 中間插入 0，變成 705）。有些二位數經此運算後，變成的三位數為原來的  $k$  倍，求整數  $k$  的最大值。\_\_\_\_\_
2. 數列  $\langle a_n \rangle$  和  $\langle b_n \rangle$  同時滿足下列條件： $a_1 = 1$ 、 $b_1 = 0$ 、 $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ 、 $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ ，求  $a_{1000}$ 。\_\_\_\_\_
3. 實數  $x$ 、 $y$ 、 $z$  滿足  $\begin{cases} x = y + \sqrt{2} \\ 2xy + 2\sqrt{2}z^2 + 1 = 0 \end{cases}$ ，求  $x + y + z$  的值。\_\_\_\_\_

計算證明題

1. 若 16 個小方格內(如右圖)各填入一個數可使四個行、四個列以及兩對角線內的四個數的和都是 1000，那麼  $a + b + c + d$  之和為何？

	a	b	
	c	d	

2. (1) 設  $x$ 、 $y$  均為正數，請證明： $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ 。  
 (2) 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為三個數，且  $a > b > c$ ，請證明： $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{4}{c-a} \geq 0$ 。
3. 四邊形  $ABCD$  中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$  的內角平分線交於點  $P$ ，請問「 $\triangle APB$  與  $\triangle CPD$  的面積和」與「 $\triangle BPC$  與  $\triangle DPA$  的面積和」是否相等，為什麼？請證明你的結論。