# 台北市立第一女子高級中學　九十三學年度數學科競試考題

## 高一組試卷詳解

填充題

1. 在一個二位數中間插入一位數，會變成三位數（例如 75 中間插入 0，變成 705）。有些二位數經此運算後，變成的三位數為原來的 $k$ 倍，求整數 $k$ 的最大值。＿＿＿＿＿

解：設原來的二位數是 $10a+b$，插入 $n$ 後變為 $100a+10n+b=k(10a+b)$，其中 $0\le a,n,b\le 9$、$a\ne 0$。

則 $k=\dfrac{100a+10n+b}{10a+b}=10+\dfrac{10n-9b}{10a+b}\le 10+\dfrac{10\times 9-9b}{10\times 1+b}=10+\dfrac{90-9b}{10+b}$

$\le 10+9-\dfrac{18b}{10+b}\le 10+9=19$。

以上諸等號要成立，必須有 $n=9$、$a=1$、$b=0$。所以 $k$ 的最大值為 19。

2. 數列＜$a_n$＞和＜$b_n$＞同時滿足下列條件：$a_1=1$、$b_1=0$、$a_{n+1}=2a_n+b_n$、$b_{n+1}=a_n+2b_n$，求 $a_{1000}$。＿＿＿＿＿

解：由題目可知 $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$，所以 $\langle a_n+b_n\rangle$ 會是一個首項為 1、公比為 3 的等比數列。從而得到 $a_n+b_n=3^{n-1}$。

又，$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$，所以 $\langle a_n-b_n\rangle$ 會是一個首項為 1、公比為 1 的等比數列。從而得到 $a_n-b_n=1$。

從以上兩點可得知 $a_n=\dfrac{1}{2}\left(3^{n-1}+1\right)$，所以 $a_{1000}=\dfrac{1}{2}\left(3^{999}+1\right)$。

3. 實數 $x$、$y$、$z$ 滿足 $\begin{cases} x=y+\sqrt{2} \\ 2xy+2\sqrt{2}z^2+1=0 \end{cases}$，求 $x+y+z$ 的值。＿＿＿＿＿

解：將上面第一式代入第二式得到 $2\left(y+\sqrt{2}\right)y+2\sqrt{2}z^2+1=0$。

可對 y 配方得到 $\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+2\sqrt{2}z^2=0$。

所以 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$、$z=0$，且 $x=y+\sqrt{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

故 $x+y+z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+0=0$。

計算證明題

1. 若 16 個小方格內（如右圖）各填入一個數可使四個行、四個列以及兩對角線內的四個數的和都是 1000，那麼 $a+b+c+d$ 之和為何？

| | | | |
|---|---|---|---|
| p | | | u |
| q | a | b | v |
| r | c | d | w |
| s | | | x |

解：設其它格子內的數如右圖，則

$p+q+r+s=1000$ ————(1)

$u+v+w+x=1000$ ————(2)

$p+a+d+x=1000$ ————(3)

$q+a+b+v=1000$ ————(4)

$r+c+d+w=1000$ ————(5)

$s+c+b+u=1000$ ————(6)

(3)+(4)+(5)+(6)-(1)-(2)：$2(a+b+c+d)=2000$

所以 $a+b+c+d=1000$

2. (1)設 $x$、$y$ 均為正數，請證明：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$。

(2)設 $a$、$b$、$c$ 為三個數，且 $a>b>c$，請證明：$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{4}{c-a}\geq 0$。

解：(1)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\geq\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2\geq 4xy\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0$$

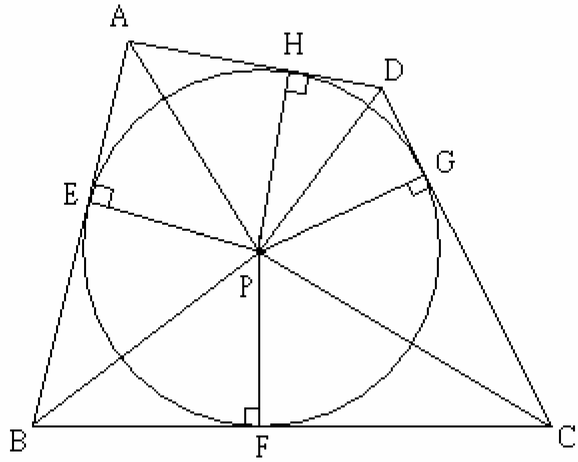
(2)

因為 $a>b>c$，所以 $a-b>0$、$b-c>0$。

利用(1)，$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}\geq\dfrac{4}{(a-b)+(b-c)}=\dfrac{4}{a-c}$，

所以 $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{4}{c-a}\geq 0$

3. 四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 、$\angle B$ 、$\angle C$ 、$\angle D$ 的內角平分線交於點 $P$，請問「$\triangle APB$ 與$\triangle CPD$ 的面積和」與「$\triangle BPC$ 與$\triangle DPA$ 的面積和」是否相等，為什麼？請證明你的結論。




解：因為$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的內角平分線交於點 $P$，所以四邊形 $ABCD$ 有一個以 $P$ 為圓心的內切圓，設內切圓分別切 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$於 $E$、$F$、$G$、$H$。

則 $\overline{PE}=\overline{PF}=\overline{PG}=\overline{PH}=$ 內切圓半徑 $r$，且有 $\overline{AE}=\overline{AH}$ 、$\overline{BF}=\overline{BE}$ 、$\overline{CG}=\overline{CF}$ 、$\overline{DH}=\overline{DG}$ 。

所以 
$$\begin{aligned}\Delta APB+\Delta CPD &= \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{PG}\\
&=\frac{1}{2}(\overline{AE}+\overline{EB})\cdot r+\frac{1}{2}(\overline{CG}+\overline{GD})\cdot r\\
&=\frac{1}{2}(\overline{AE}+\overline{EB}+\overline{CG}+\overline{GD})\cdot r\\
&=\frac{1}{2}(\overline{AH}+\overline{BF}+\overline{CF}+\overline{DH})\cdot r\\
&=\frac{1}{2}(\overline{BF}+\overline{CF})\cdot r+\frac{1}{2}(\overline{AH}+\overline{DH})\cdot r\\
&=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot r+\frac{1}{2}\overline{DA}\cdot r\\
&=\Delta BPC+\Delta DPA\end{aligned}$$