

數學競賽初賽試題

*計算證明題共六題

- 二正整數的最小公倍數是 3600，求此二正整數的解共有幾組？ (10分)
- 已知一正 n 邊形，對角線數目恰與邊長數相同(即有 n 條對角線)，假設他的周長為 p ，所有對角線長之和為 q ，求 $\frac{q}{p} - \frac{p}{q}$ 之值。 (15分)
- 設 x, y, z 皆不等於 0，且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ ，
試證：任意正奇數 n ，使得 $x^n + y^n + z^n = (x+y+z)^n$ 恆成立。 (15分)
- 三角形 ABC 的三邊長為 a, b, c ，面積等於 $\frac{1}{4}$ ，外接圓半徑為 1，
(1)試證： $abc=1$
(2)若 $s = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ， $t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ，試比較 s, t 的大小關係。 (20分)
- 設平面上有 2003 個相異點，將這些點任意塗上紅色或黃色，且任意三個同色點不共線，
試證：存在一個三角形，滿足下列兩條件
(1) 它的三頂點顏色相同
(2) 它的三邊中，至少有一條邊上不包含另一種顏色的點 (20分)
- 四邊形 ABCD 中， \overline{AB} 平行 \overline{DC} ，且 $\overline{BC} = \overline{AD}$ ，連接 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 其交點為 P ，
設 $\overline{BP}, \overline{CP}, \overline{AD}$ 線段的中點依次為 X, Y, Z ，且 $\triangle APB$ 為正三角形，
請問 $\triangle XYZ$ 是否為正三角形？試證明你的結論！ (20分)

