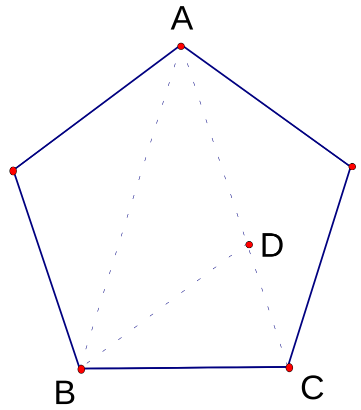
台北市立第一女子高級中學九十一學年第二學期數學競賽初賽試題解答

1. $(5^2-4^2)(3^2-2^2)(3^2-2^2)=25$

$\because$ 相同有一組

$\therefore \dfrac{225-1}{2}+1=113$

2. $n=5$ 令此正五邊形一邊長為 1，如右圖所示，$\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{BC}$



$\because \Delta ABC \sim \Delta BCD \quad (ASA)$

$\therefore 1:x=1+x:1 \Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$(負不合)

$\Rightarrow$ 對角線 $=1+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\therefore\ p=5\,,\,q=\dfrac{5(\sqrt{5}+1)}{2}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\frac{5(\sqrt{5}+1)}{2}}{5}-\dfrac{5}{\frac{5(\sqrt{5}+1)}{2}}=1$

3.

由 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$

$\Rightarrow (xy+yz+zx)(x+y+z)=xyz$

$\Rightarrow (xy+z(x+y))((x+y)+z)=xyz$

$\Rightarrow xy(x+y)+z(x+y)^2+z^2(x+y)=0$

$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$

$\Rightarrow x=-y$ 或 $y=-z$ 或 $z=-x$

當 $x=-y$ 代入，n 為奇數時

$x^n+y^n+z^n=(-y)^n+y^n+z^n=z^n$，

$(x+y+z)^n=z^n$

其他當 $y=-z$ 或 $z=-x$ 時同理可證

4.

(1) $\Delta=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow\dfrac{1}{4}=\dfrac{abc}{4\times1}\quad\therefore abc=1$

(2)方法一：$t=abct=ab+bc+ca$

$$(ab+bc+ca)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a})^2$$（柯西不等式）

$\Rightarrow t^2 \ge s^2 \Rightarrow t \ge s \quad (\because t, s, a, b, c > 0)$

但 $t \ne s \quad (t = s$時，$a = b = c$而$a\Delta ABC = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \ne 1 \therefore$ 不合$)$

方法二：

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \ge \sqrt{\frac{1}{ab}} = \sqrt{c} \cdots\cdots①$$

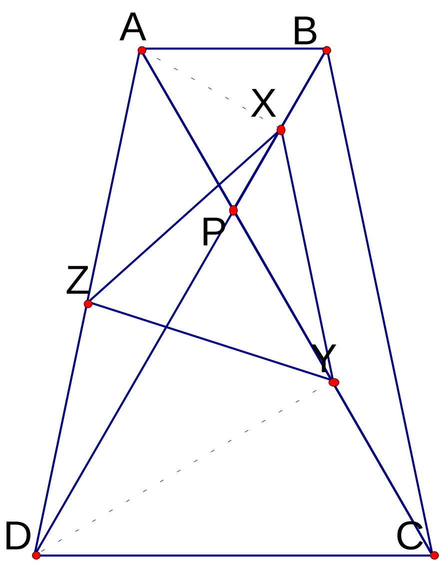
$$\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}{2} \ge \sqrt{\frac{1}{cb}} = \sqrt{a} \cdots\cdots②$$

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2} \ge \sqrt{\frac{1}{ac}} = \sqrt{b} \cdots\cdots③$$

①＋②＋③得$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \quad \therefore t \ge s$

5. 顯然必有一種顏色的點數不少於 3 個，不妨設為紅色。則由於同色三點不共線，故任取三點為 R_1、R_2、R_3，兩兩連線所形成之三線段圍成一封閉三角形即為所求，故必存在同色三角形。
   在所有同色三角形中取面積最小者，若結論(2)不成立，則在此三角形三邊上皆至少有一異色點，在三邊各取一異色點，又形成一新的同色三角形。$\because$新同色三角形在原取之三角形內故面積必小於原三角形，與所設面積最小之條件矛盾。$\therefore$至少有一邊上找不到異色點$\therefore$得證在在一個同色的三角形三邊上至少有一邊不含異色點。

6.



方法一：連接$\overline{AX}$ $\because \Delta ABP$為正Δ

又 X 為$\overline{BP}$中點 $\quad \therefore \overline{AX} \perp \overline{BP} \quad \therefore \overline{AZ} = \overline{ZD} = \overline{ZX}$

又$\overline{AZ} = \dfrac{1}{2}\overline{AD} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$,同理，連$\overline{DY}$得$\overline{ZY} = \overline{ZX}$

在ΔBPC中$\because X$，Y為$\overline{BP}$，$\overline{PC}$ 中點 $\quad \therefore \overline{XY} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{XY} = \dfrac{1}{2}\overline{BC} = \overline{AZ} = \overline{ZY} = \overline{ZX}$

$\therefore \Delta XYZ$三邊等長 $(\overline{XY} = \overline{ZY} = \overline{ZX})$為正三角形

.方法二：

1. $\because \Delta APB$為正Δ，又$\overline{AB}$平行$\overline{CD}$ $\therefore \Delta CDP$為正Δ
2. 分別於$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BD}$上取$\overline{BF}$、$\overline{BE}$使得$\overline{BE} = \overline{DP} = \overline{CP} = \overline{BE}$

3. 分别於$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{CP}$上取$\overline{CG}$、$\overline{CH}$使得$\overline{CG}=\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CH}$

4. $\because \Delta ABP \cong \Delta GHC$ (SAS)、$\Delta CDP \cong \Delta EFB$ (SAS)

$\therefore \overline{AE}=\overline{PF}=\overline{DH}=\overline{GP}=\overline{AD}=\overline{CB}$

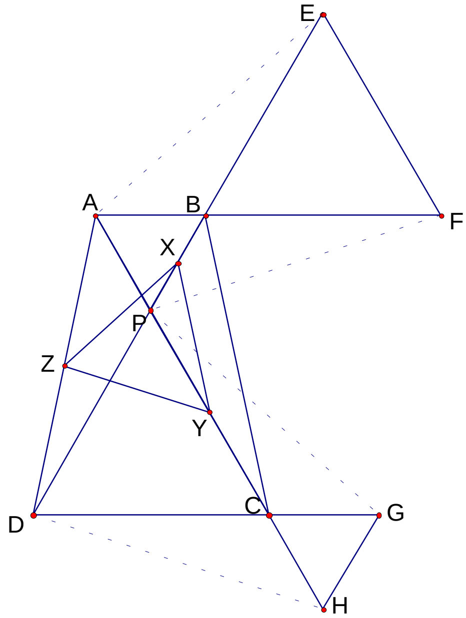
5. 又$\because \Delta PXY \sim \Delta PBC$ (SAS)

$\Delta AZY \sim \Delta ADH$ (SAS)

$\Delta DXZ \sim \Delta DEA$ (SAS)

$\therefore \overline{XY}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{DH}=\overline{ZY}=\frac{1}{2}\overline{AE}=\overline{ZX}$

$\therefore \overline{XY}=\overline{ZY}=\overline{ZY} \Rightarrow \Delta ABC$為正$\Delta$



方法三：

$\Delta APB \sim \Delta PDC$　設$\overline{PD}$中點為 O

$\Rightarrow \overline{ZO}$ 平行 $\overline{AP}$；$\overline{ZO}=\frac{1}{2}\overline{AP}$

$\Rightarrow \overline{OY}$ 平行 $\overline{DC}$；$\overline{OY}=\frac{1}{2}\overline{DC}$

在 ΔZOY 和 ΔXPY 中

$\because \overline{ZO}=\frac{1}{2}\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{BP}=\overline{PX}$

$\overline{OY}=\frac{1}{2}\overline{DC}=\frac{1}{2}\overline{PC}=\overline{PY}$

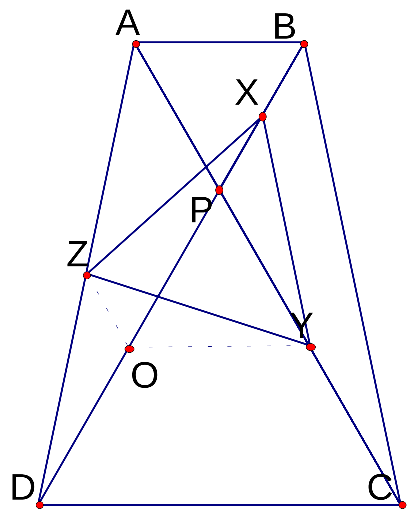
$\angle ZYO=\angle XYP=60^\circ-\angle PYZ$

$\therefore \Delta ZOY \cong \Delta XPY$

$\therefore \overline{ZY}=\overline{XY}$

同理 $\overline{ZX}=\overline{XY}=\overline{ZY}$

$\therefore \Delta XYZ$ 為正 Δ



方法四：

以P為原點，$\overleftrightarrow{BD}$為 x軸

設$B(4,0)$　$D(-4a,0)$

則可知 $X(2,0)$　$Y(-a,-\sqrt{3}a)$　$Z(1-2a,\sqrt{3})$ 四：

$\Rightarrow \overline{XY}^2=\overline{YZ}^2=\overline{XZ}^2=4a^2+4a+4$

$\Rightarrow \overline{XY}=\overline{YZ}=\overline{XZ}$

$\Rightarrow \Delta XYZ$為正Δ