高二高三組　第一部份　參考解答

1.(1)作$\overline{RK}$與$\overline{AB}$垂直交於 K，並延長$\overline{RP}$交$\overline{AC}$於 H，則

① $\angle PRK=\dfrac{1}{2}\angle PRB=\angle PDB=\angle BAC=\angle PAH$　② $\angle RPK=\angle APH$

$\Rightarrow \angle PHA=\angle PKR=90^\circ$，即$\overline{RH}\perp\overline{AC}$。得證：$\overline{PR}\perp\overline{AC}$

(2)作$\overline{OQ}$，並設$\overline{AC}$中點 M

① $\overline{AC}$為 A,B,C,D 所在的圓之一弦$\Rightarrow \overline{OM}\perp\overline{AC}$

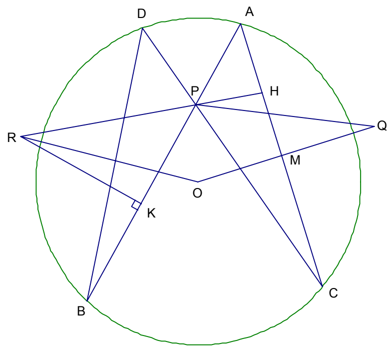
② $\overline{AC}$為 A,P,C 所在的圓之一弦$\Rightarrow \overline{GM}\perp\overline{AC}$

$\Rightarrow$O,M,Q 共線，而$\overline{OQ}$為$\overline{AC}$的中垂線

承(1)，可知：$\overline{PR}$平行$\overline{OQ}$，同理可證：$\overline{QP}$平行$\overline{OR}$

$\Rightarrow$四邊形 RPQO 為一平行四邊形

$\Rightarrow$四邊形 RPQO 的對角線$\overline{OP},\overline{QR}$相互平分



2.

a	x			e
	y	z		
		c		
b				d

若所填的四個數之和均為 9 的倍數，則
$a+x+y+z=9k,\ x+y+z+c=9k'$ (k,k'$\in$Z)
$\Rightarrow a-c=9(k-k')$，即 a 與 c 以 9 除之，同餘。
同理，以 9 除之，b 與 c，d 與 c，e 與 c 均同餘，
但$\{1,2,\cdots,25\}$不可能挑出 5 個相異數 a,b,c,d,e
以 9 除之，同餘。

3. $(x+1)(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\mid f^3(x)-1$　(ω 為 $x^3=1$ 一虛根)

$\Rightarrow f^3(-1)=f^3(1)=f^3(\omega)=f^3(\omega^2)=1$，

即 $f(-1),f(1),f(\omega),f(\omega^2)$ 為 $x^3=1$ 的根，又 $f(x)$ 為實係數多項式，得知：

① $f(-1)=f(1)=1,f(\omega)=f(\omega^2)=1$或② $f(-1)=f(1)=1,f(\omega)=\omega^2,f(\omega^2)=\omega$

或③ $f(-1)=f(1)=1,f(\omega)=\omega^2,f(\omega^2)=\omega$

①若 $f(-1)=f(1)=f(\omega)=f(\omega^2)=1$，令 $F(x)=f(x)-1$，若 $F(x)\neq$□，則 $F(x)$ 次數為3與 $(x+1)(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\mid F(x)$ 矛盾，得知$F(x)$= □，即$f(x)$=1　(不合)

②若 $f(-1)=f(1)=1,f(\omega)=\omega,f(\omega^2)=\omega^2$，即

$f(-1)=f(1)^2,f(1)=1^2,f(\omega)=\omega^2,f(\omega^2)=(\omega^2)^2$，令 $F(x)=f(x)-x^2$，若 $F(x)\neq$□，則 $F(x)$次數為 3 與 $(x+1)(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\mid F(x)$ 矛盾，得知 $F(x)$= □，即 $f(x)=x^2$　(不合)

③若 $f(-1)=1,f(1)=1,f(\omega)=\omega,f(\omega^2)=\omega^2$，令 $F(x)=f(x)-x$，則 F(x)次數為 3，$F(1)=F(\omega)=F(\omega^2)=0$，(即 $(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\mid F(x)$)，得

$F(x)=k(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)$，即 $f(x)=k(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)+x$ 又

$f(-1)=1\Rightarrow k=-1\Rightarrow f(x)=-(x^3-1)+x=-x^3+x+1$

4.① 可設 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，則 $a_1 \ge 2, a_2 \ge 3, \cdots, a_n \ge n+1$，得

$$1+\frac{1}{2^2} \ge 1+\frac{1}{{a_1}^2}, 1+\frac{1}{3^2} \ge 1+\frac{1}{{a_2}^2}, \cdots, 1+\frac{1}{(n+1)^2} \ge 1+\frac{1}{{a_n}^2}$$

$$\Rightarrow (1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\cdots(1+\frac{1}{(n+1)^2}) \ge (1+\frac{1}{{a_1}^2})(1+\frac{1}{{a_2}^2})\cdots(1+\frac{1}{{a_n}^2})$$

只要證明： $n \ge 2,\ (1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\cdots(1+\frac{1}{(n+1)^2}) \ge 2$ 即可

② $n \ge 2,\ 1+\frac{1}{n^2} = \frac{n^2+1}{n^2} < \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}$

$$\Rightarrow (1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\cdots(1+\frac{1}{(n+1)^2}) < (\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4})\cdots(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1})(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}) = 2\cdot\frac{n+1}{n+2} < 2$$

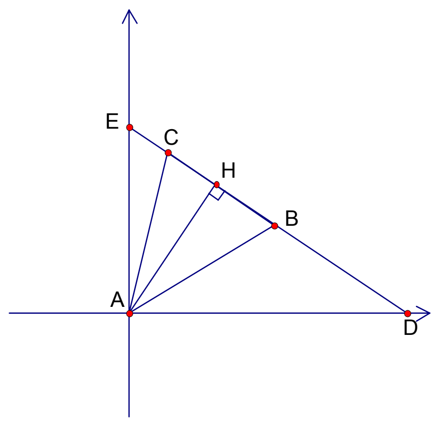
5. ΔABC 面積： ΔACE 面積 $=2:1=\overline{BD}:\overline{CE}$，設

$\overline{BD}=2x, \overline{CE}=x, \overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AC}=1$，則 ΔABC 的高 $\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，而

$\overline{AH}^2=\overline{BH}\cdot\overline{CH}$，得

$$(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = (x+\frac{1}{2})(2X+\frac{1}{2}) \Rightarrow X=\frac{1}{4} \text{或} -1(\text{不合})$$

$$\Rightarrow \Delta ACE\text{面積} : \Delta ABC\text{面積} =: x:(x+1+2x)=1:7$$



高二高三組　第二部份　參考解答

1. ①n=2 時，$25\times 2^2+24\times 2+34=182=13\times 14$

②n > 2 時，$(5n+1)(5n+2)<25n^2+24n+34<(5n+3)(5n+4)$

若 $25n^2+24n+34=m(m+1), m\in N$，$25n^2+24n+34=(5n+2)(5n+3)$得 n=28

2. 令$\begin{cases}u=x+y\\ v=xy\end{cases}$ 原題$\Rightarrow 3u^2-13v=7$求u^2-2v的最小值。

而$u^2=\frac{13v+7}{3}, v\ge -\frac{7}{13}\Rightarrow u^2-2v=\frac{13v+7}{3}-2v=\frac{7}{3}(v+1)\ge\frac{14}{13}$

(u^2-2v的最小值時，$u=0, v=-\frac{7}{13}$，即$x=\pm\sqrt{\frac{7}{13}}$ $y=\mp\sqrt{\frac{7}{13}}$時x^2+y^2最小)

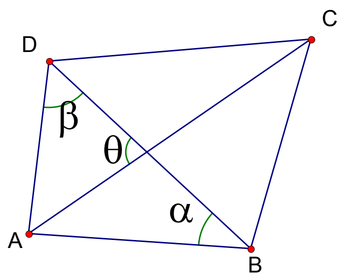
3. ①$\because \angle abc=\angle adc=90^\circ\Rightarrow \theta=180^\circ-(90^\circ-\alpha)-\beta=90^\circ+\alpha-\beta$

$\Rightarrow \sin\theta=\sin(90^\circ-(\beta-\alpha))=\cos(\beta-\alpha)$ ② ΔABC中

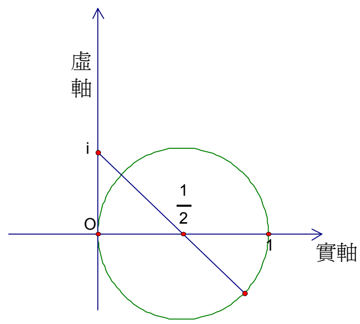
$\overline{BD}=\sqrt{7}, \frac{1}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{7}}{\sin 120^\circ}$，得

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{5}{2\sqrt{7}}, \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow \sin\theta=\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{13}{14}$



4. 在複數平面上，滿足”$\frac{z}{z-1}$ 爲純虛數”的 z 相對的點 p(z)之軌跡爲以 p(0)，p(1)爲直徑兩端的圓，而$|z-i|$(p(z)至 p(i)的距離)最大值=p(i)至 p($\frac{1}{2}$)距離+圓半徑$\frac{1}{2}\Rightarrow |z-i|$最大值=$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



5. 欲使球有最大半徑 r，則這 20 個球由下而上，分四層堆積，各層球數分別爲 10,6,3,1 個，而外層的球與原正四面體相切。

①第二層的球的球心與底層三角落的球之球心構成一正四面體的頂點。此一正四面體稜長 6r，得此一正四面體高

$=\frac{\sqrt{6}}{3}\times 6r=2\sqrt{6}r$

②底層的球之球心至原四面體底面距離= r

③............(最接近的點)距離= 3r

$\Rightarrow$原正四面體高=

$\frac{\sqrt{6}}{3}=r+2\sqrt{6}r+3r\Rightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{4+2\sqrt{6}}=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$