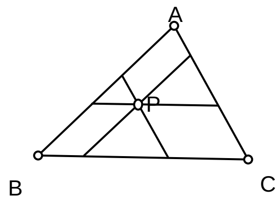
台 北 市 立 北 一 女 中 九 十 一 學 年 度 數 學 科 競 試 考 題

高一組試卷

一、填充題(35 分；第 1,2 題各 10 分，第 3 題 15 分)

1. △ABC 內部一點 P，過 P 作三邊的平行線，所形成三塊小三角形面積分別為 2,3,4，求△ABC 面積____________



2. 有限數列 $a_1,a_2,\ldots a_N$，$S_k= a_1 + a_2 + \cdots+a_k$，$1≦k≦N$，令$T_n=\dfrac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}$稱為此數列”和的算術平均”，今有一 999 項的數列 $a_1,a_2,\ldots a_{999}$，其”和的算術平均”$T_{999}=10000$，則 1000 項的數列：$1, a_1,a_2,\ldots a_{999}$，其”和的算術平均”$T_{1000}=$__________

3. 設 N 為三位數，若 N^2 與 N^3 的末三位數字相同，則滿足條件的 N 最大為__________

二、計算與證明(第 1 題 15 分，第 2,3 題各 25 分)

1. 高斯符號 $[x]$ 表示小於等於 x 的最大整數

   令 $S_n=[\frac{n}{1}]+[\frac{n}{2}]+\ldots+[\frac{n}{n}]$

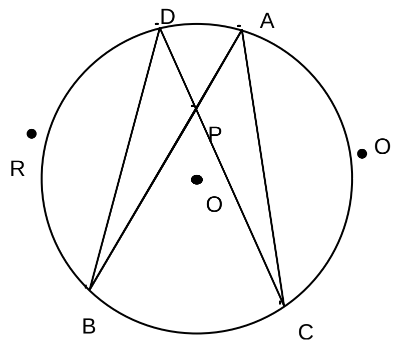
   (1)求 $S_{2002}-S_{2001}=$__________

   (2)試證 $S_N ≧ 2N-1$

2. 設以 O 為圓心的圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 P，而 Q、R 分別為△APC 與△BPD 的外心，試證：

   (1)直線 $\overleftrightarrow{PR}$ 垂直 $\overleftrightarrow{AC}$

   (2)線段 $\overline{OP}$ 與 $\overline{QR}$ 互相平分



3. (1)試比較 $\frac{92}{91},\frac{93}{92},\frac{2003}{2002}$ 三數的大小

   (2)設 $a_1,a_2,\ldots a_n$ 為大於 1 且相異的自然數

   試證：$(1+\frac{1}{a_1^2})(1+\frac{1}{a_2^2})\ldots(1+\frac{1}{a_n^2})<2$