北一女中 91 學年度數學能力競賽 （高一組）參考解答

一、填充題 ：

1. 所形成三小塊三角形均與ΔABC相似, 而此三塊三角形面積之比為 2:3:4 知此三小塊三角形及ΔABC對應邊邊長之比為

   $\Rightarrow \sqrt{2}:\sqrt{3}:2:(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)$ $\Rightarrow \Delta ABC$面積$=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)^2$

2. 依題意, A={$a_1, a_2, \ldots a_{999}$}, A 的和的算數平均

   $T_{999}=\dfrac{1}{999}(S_1+S_2+\ldots+S_{999})=10^4$, A'={1, $a_1, a_2, \ldots a_{999}$}, A'的和的算數平均 $T'_{1000}=\dfrac{1}{1000}(S'_1+S'_2+\ldots+S'_{1000})$ 而 $S_1=a_1$,

   $S_2=a_1+a_2$, …$S_{999}=a_1+a_2+\ldots+a_{999}$.

   $S'_1=1$, $S'_2=1+a_1$, …$S'_{999}=1+a_1+\ldots+a_{998}$, $S'_{1000}=1+a_1+\ldots+a_{999}$.

   $\Rightarrow T'_{1000}=\dfrac{1}{1000}(10^3+S_1+S_2+\ldots S_{999})=\dfrac{1}{1000}(10^3+999\times 10^4)=9991$.

3. $1000 \mid N^3-N^2 \Rightarrow 2^3\times 5^3 \mid N^2(N-1)$, 而 $(N^2, N-1)=1$

   (1) $2^3 \mid N^2$ 且 $5^3 \mid N-1 \Rightarrow 4 \mid N$ 且

   $125 \mid N-1 \Rightarrow N=4x=125y+1 \Rightarrow N=376$ or 876.

   (2) $2^3 \mid N-1$ 且 $5^3 \mid N^2 \Rightarrow 8 \mid N-1$ 且

   $25 \mid N \Rightarrow N=25x+8y+1 \Rightarrow N=225$ or 425 or 625 or 825. x,y$\in N$

   (3) $2^3\times 5^3 \mid N^2 \Rightarrow 100 \mid N \Rightarrow N=100x.$ x$\in N$ $\Rightarrow$N=100 or 200 or 300 or 400 or 500 or700 or 800 or 900.

   符合條件的三位數 N 有 14 個.

二. 計算證明題

1. (a) K$\in N$ (1)若$K \mid n+1$ 則 $[\dfrac{n+1}{K}]=[\dfrac{n}{K}]+1$. (2)若$K$不整除 n+1,則

$[\frac{n+1}{K}]=[\frac{n}{K}]$. 又

$S_{n+1}-S_n=([\frac{n+1}{1}]-[\frac{n}{1}])+([\frac{n+1}{2}]-[\frac{n}{2}])+.....+([\frac{n+1}{n}]-[\frac{n}{n}])+[\frac{n+1}{n+1}]$. 而

2001=3×23×29 知 : 2001 有 8 個正因數.

$\Rightarrow S_{2002}-S_{2001}=8+1=9$

(b) n+1 至少有 1 及 n+1 兩個正因數. 知: $\forall n\in N.\quad S_{n+1}-S_n\geq 2$,

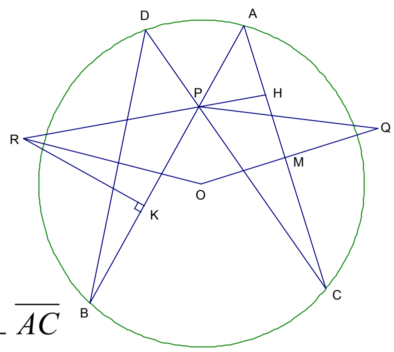
$S_1=1\Rightarrow S_2-S_1\geq 2,\quad S_3-S_2\geq 2,\ ......\ S_n-S_{n-1}\geq 2$

$\Rightarrow (S_n-S_{n-1})+(S_{n-1}-S_{n-2})+.....+(S_2-S_1)\geq 2n\Rightarrow S_n\geq 2n-1\quad (\forall n\in N)$

2. (1)作 $\overline{RK}$ 與 $\overline{AB}$ 垂直交於 K，並延長 $\overline{RP}$ 交 $\overline{AC}$ 於 H，則

① $\angle PRK=\frac{1}{2}\angle PRB=\angle PDB=\angle BAC=\angle PAH$ ② $\angle RPK=\angle APH$

$\Rightarrow \angle PHA=\angle PKR=90^\circ$，即 $\overline{RH}\perp\overline{AC}$ 。



得證： $\overline{PR}\perp\overline{AC}$

(2)作 $\overline{OQ}$ ，並設 $\overline{AC}$ 中點 M

① $\overline{AC}$ 爲 A,B,C,D 所在的圓之一弦 $\Rightarrow \overline{OM}\perp\overline{AC}$

② $\overline{AC}$ 爲 A,P,C 所在的圓之一弦 $\Rightarrow \overline{GM}\perp\overline{AC}$

$\Rightarrow$ O,M,Q 共線，而 $\overline{OQ}$ 爲 $\overline{AC}$ 的中垂線

承(1)，可知： $\overline{PR}$ 平行 $\overline{OQ}$ ，同理可證： $\overline{QP}$ 平行 $\overline{OR}$

$\Rightarrow$ 四邊形 RPQO 爲一平行四邊形

$\Rightarrow$ 四邊形 RPQO 的對角線 $\overline{OP}$, $\overline{QR}$ 相互平分

3. ①可設 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ ，則 $a_1\geq 2, a_2\geq 3,\cdots,a_n\geq n+1$ ，得

$1+\frac{1}{2^2}\geq 1+\frac{1}{{a_1}^2}, 1+\frac{1}{3^2}\geq 1+\frac{1}{{a_2}^2},\cdots,1+\frac{1}{(n+1)^2}\geq 1+\frac{1}{{a_n}^2}$

$$\Rightarrow (1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\cdots(1+\frac{1}{(n+1)^2}) \geq (1+\frac{1}{{a_1}^2})(1+\frac{1}{{a_2}^2})\cdots(1+\frac{1}{{a_n}^2})$$

只要證明： $n \geq 2,\ (1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\cdots(1+\frac{1}{(n+1)^2}) \geq 2$ 即可

② $n \geq 2,\ 1+\frac{1}{n^2} = \frac{n^2+1}{n^2} < \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}$

$$\Rightarrow (1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\cdots(1+\frac{1}{(n+1)^2}) < (\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4})\cdots(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1})(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}) = 2\cdot\frac{n+1}{n+2} < 2$$