

# 北一女中 90 學年度第一學期數學競試(高二高三組)試題

注意事項：

1. 考試時間：二小時。
2. 請將答案寫在答案卷內，計算紙必須連同答案卷交回。
3. 不可使用計算器。
4. 本試卷共五題，每題配分標示在各題之首。

一、(10%)平面上任意 2001 點，其中任意 3 點中至少有 2 點的距離不超過 1；  
證明：存在一個半徑為 1 的圓內(含內部及圓上的點)至少有 1001 個點。

二、(15%)找出所有定義於實數集  $R$  上的實值函數  $f$ (即  $f: R \rightarrow R$ )，使  $f$  滿足對任意實數  $x$ ，  
 $f(x) + xf(1-x) = x^2 + 1$  恆成立。

三、(20%)設  $p$ 、 $q$  為實數且  $x^3 - px + q = 0$  有三實根，  
證明：(1)  $p \geq 0$ 。

(2)此方程式的根必小於等於  $2\sqrt{\frac{p}{3}}$ 。

四、(25%)設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為自然數，證明： $a^2 + b^3 = b^c$  無解

五、(30%)設  $\triangle ABC$  不是鈍角三角形，過  $C$  的高  $\overline{CH}$  與中線  $\overline{CM}$  分別交  $\overline{AB}$  於  $H$  與  $M$ ， $\overline{AR}$  平分  $\angle BAC$ ，分別交  $\overline{CH}$ 、 $\overline{CM}$ 、 $\overline{BC}$  於  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ ；若  $\overline{BP}$ 、 $\overline{BQ}$  三等分  $\triangle ABC$ ，證明： $\triangle ABC$  為直角三角形。