九 十 學 年 度 第 一 學 期 數 學 競 試（高 二 高 三 組）參 考 答 案

1. (1) **若任意兩點的距離都小於等於 1，則命題顯然成立。**

   (2) **若有兩點** A、B **之距離大於** 1，**則以** A、B **各為圓心，**1 **為半徑作圓，那麼** A、B **之外的** 1999 **個點，任一點不是在以** A **為圓心的圓內，就是在以** B **為圓心的圓內，由鴿籠原理可知，有** 1000 **個點以上在以** A **為圓心的圓或以** B **為圓心的圓內，再加用** A、B **本身，就有** 1001 **個點以上在同一圓內，命題成立。**

   由(1)、(2)**的結果，可確定本命題成立。**

2. $\because\ f(x)+xf(1-x)=x^2+1$..(1)$\therefore\ f(1-x)+(1-x)f(1-(1-x))=(1-x)^2+1$，

   $f(1-x)+(1-x)f(x)=x^2-2x+2$ **亦即** $f(1-x)=(x-1)f(x)+(x^2-2x+2)$ **代入**(1)**式得**

   $f(x)+x(x-1)f(x)+x(x^2-2x+2)=x^2+1$，**因此**

   $(x^2-x+1)f(x)=-x^3+3x^2-2x+1$ **可得** $f(x)=\dfrac{-x^3+3x^2-2x+1}{x^2-x+1}$

   (x^2-x+1 **恆不為** 0)，**滿足條件，將** $f(x)$ **代入原命題的條件成立，所以唯有一函數** $f(x)=\dfrac{-x^3+3x^2-2x+1}{x^2-x+1}$ **滿足條件。**

3. **因為** $x^3-px+q=0$ **有三個實根，設** a **為一根** $x^3-px+q=(x-a)(x^2+ax+(a^2-p))$，**可知** $x^2-ax+(a^2-p)=0$ **有兩實根，所以判別式** $(-a)^2-4(a^2-p)\geq 0$，**即** $4p\geq 3a^2$，**所以** $p\geq\frac{3}{4}a^2\geq 0$，**又** a **為任意一個根，可得** $a^2\leq\frac{4p}{3}$，**即** $|a|\leq 2\sqrt{\frac{p}{3}}$，**所以** $a\leq 2\sqrt{\frac{p}{3}}$

4. **設** $a^2+b^3=b^c$ **有自然數解，顯然** $c>3$

   因此 $a^2=b^c-b^3=b^3(b^{c+3}-1)$，**因此** b^2 **是** a^2 **的因數，則** b **是** a **的因數，令** $a=bk,k\in N$，**則** $b^2k^2=b^3(b^{c-3}-1)$，b **與** $b^{c-3}-1$ **必互質，所以** $b,b^{c-3}-1$ **必都是完全平方數，令** $b=d^2$，**則** $k^2=b(b^{c-3}-1)$，**可知** d **為** k **的因數，令** $k=dl,l\in N$，**所以** $a^2+b^3=b^c$ **有自然數解是錯的，即** $a^2+b^3=b^c$ **沒有自然數解，得證。**

5. **如圖，延長**$\overline{BP},\overline{BQ}$**交**$\overline{AC}$**於** D，E，**由西瓦定理可知，**(**令**$\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$)

$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{BR}}{\overline{RC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$**，又**$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\Delta BCE}{\Delta BAE}=\frac{\sin q}{c\sin 2q}$**，**(**令**$q=\frac{1}{3}\angle$ABC)**，而且，**$\frac{\overline{BR}}{\overline{RC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{c}{b}$**，**
所以$\frac{c}{b}\times\frac{a\sin q}{c\sin 2q}=1$**，因此**$\frac{a}{b}=2\cos q \because (1)$**，同理，**$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}\times\frac{\overline{BR}}{\overline{RC}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=1$**，又**
$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{b\cos A}{a\cos B},\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=\frac{a\sin 2q}{c\sin q}$,**所以**$\frac{b\cos A}{a\cos B}\times\frac{c}{b}\times\frac{a\sin 2q}{c\sin q}=1$**，即得**$2\cos q=\frac{\cos B}{\cos A}...(1)$**，由**
正弦定理可知$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}...(3)$**，由**(1)**、**(2)**、**(3)**可得**$\frac{\cos B}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sin B}$**即**$\sin 2A=\sin 2B$**，**

因此 2A=2B **或** 2A+2B=180°**，即** A=B **或** A+B=90°**，但** A=B **時，**H **與** M **重和，**

與題意不合，所以 A+B=90°**，即** C=90°**，所以**△ABC **是直角三角形。**