北 一 女 中 90 學 年 度 數 學 競 試 （高 一 組） 試 題

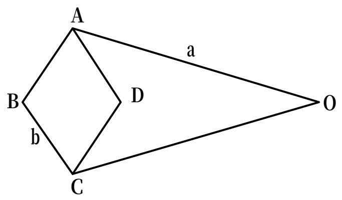
說明：本試題共分第一部分填充題與第二部分計算證明題　時間：2 小時

第一部分：填充題(每格 5 分，共 50 分，只須填答案)

1. **如果** a,b **都是整數，且** x^2-x-1 **是** $ax^{17}+bx^{16}+1$ **的因式，試求** a,b **之值，得** $a=$_____, $b=$_____

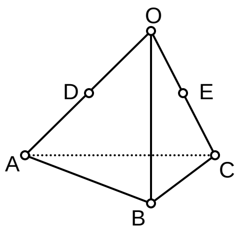
2. **定義在<u>有序正整數對</u>上的函數，滿足下列三條件：**
   $(i)\ f(x,x)=x$　　$(ii)\ f(x,y)=f(y,x)$　　$(iii)\ (x+y)\cdot f(x,y)=y\cdot f(x,x+y)$
   試計算 $f(45,12)$ **的值為**___________

3. **有一凸六邊形** $ABCDEF$ **的六個內角都相等，已知邊長** $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=6$，$\overline{DE}=7$，**則剩下的二邊長** $\overline{EF}=$_______，$\overline{FA}=$________



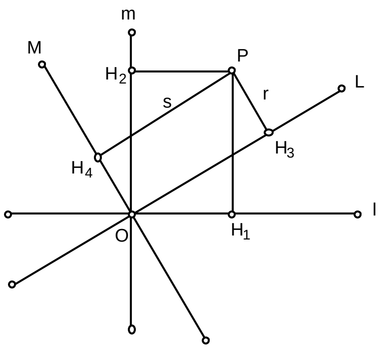
4. **如果** $\overline{OA}=\overline{OC}=a$，**且菱形** $ABCD$ **的邊長為** b，$(0<b<a)$，**如圖示，則** $\overline{OB}\cdot\overline{OD}=$_______

5. **如圖，** $O-ABC$ **是一個正四面體，且正四面體的六個邊長都相等為** $2a$，$(a>0)$，D,E **兩點依序為** $\overline{OA},\overline{OC}$ **邊的中點，那麼** DE **與** AB **兩直線間的距離為**__________



6. **設** m **是一個固定的正整數，** $(m>2)$，**且**　$2^{2m}+2^{2m+3}+2^n$　**表一個完全平方數，試求正整數** n **的值為**_________

7. **設四直線** l,m,L,M **共點** O，**且** l **與** m **互相垂直，又** L **與** M **也互相垂直(如圖示)。假若** L **與** l **的夾角中銳角為** a，**今自** P **分別引** l,m,L,M **的垂線，垂足依序為** H_1,H_2,H_3,H_4，**且** $\overline{OH_1}=x$、$\overline{OH_2}=y$、$\overline{OH_3}=r$、$\overline{OH_4}=s$，**則以** x,y **及角** a **表出** r **與** s **來，** $r=$________，$s=$_______



第二部分：計算題與證明題，每題 10 分共計 50 分

(**一**) **設有一個非負的實係數多項式** $f(x)$ **，滿足** $f(1)=8$、 $f(2)=11$、 $f(3)=14$ **，則** $f(4)$ **之值為何？為什麼？**

(**二**) **若** $A=\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_1,a_2,a_3$ **皆為正整數，且** $a_1\mid a_2$ **；** $a_2\mid a_3$ **；** $a_3\mid 20\}$ **，則集合** A **共有多少個元素？**

(**三**) **規定** $[x]$ **表不大於** x **的最大整數，例如：** $[-2.8]=-3$ **，** $[3.5]=3$

(1) **試求滿足** $\left[\dfrac{x}{4}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]$ **的所有整數解**

(2) **設** m **為固定的整數且** $m>2$ **，試求：滿足** $\left[\dfrac{x}{m}\right]=\left[\dfrac{x}{m-1}\right]$ **的正整數解的個數**

(**四**) **無刻度的天平一架，且有標上重量分別為** $1^2,2^2,3^2,4^2,\ldots.$ **單位的砝碼各一個。現在想利用這些砝碼來稱物體的重量，但是規定只要天平的一端有砝碼** k^2 (**單位**)**時，則必須在兩端出現** $1^2,2^2,3^2,\ldots.,(k-1)^2$ (**單位**)**，請問妳是否有辦法利用這種方式，稱出所有正整數單位的物體重量來？**(**為什麼？**)

<**例**> $1=1^2$ $\qquad$ $2=-1^2-2^2-3^2+4^2$

$3=-1^1+2^2$ $\qquad$ $4=1^2-2^2-3^2+4^2$

$5=1^2+2^2$ $\qquad$ $6=-1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2$

(**五**) **將** n **個正數，** $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\ldots,\dfrac{1}{n}$ **，** $(n\geq 2)$ **作** $(n-1)$ **次的操作，每次取出其中的二數** a **與** b **，換回一新數** $(a+1)(b+1)-1$ **，則如此操作** $(n-1)$ **次後，最後剩下一數為多少？**(**為什麼？**)