北 一 女 中 九 十 學 年 度 第 一 學 期 高 一 數 學 競 試 答 案

第一部份：填充題(每格 5 分)

1		2	3	
$a=2167$	$b=-1597$	$\frac{1}{20}$	$\overline{EF}=1$	$\overline{FA}=8$
4	5	6	7	
a^2-b^2	$\frac{\sqrt{6}}{3}a$	$2m+4$	$r=x\cos\alpha+y\sin\alpha$	$s=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$

(一)

1. $x^2-x-1 \mid ax^{17}+bx^{16}+1$ Þ $\begin{cases} a\alpha+b=-\dfrac{1}{\alpha^{16}}\ldots\ldots(1) \\ a\beta+b=-\dfrac{1}{\beta^{16}}\ldots(2) \end{cases}$

其中α,β**為** $x^2-x-1=0$ **的二根，故**$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$

由(1)－(2) $a(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{\beta^{16}}-\dfrac{1}{\alpha^{16}}=\dfrac{\alpha^{16}-\beta^{16}}{(\alpha\beta)^{16}}=\alpha^{16}-\beta^{16}$

Þ $a=\dfrac{\alpha^{16}-\beta^{16}}{\alpha-\beta}=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^8+\beta^8)$

由(1)＋(2) $a(\alpha+\beta)+2b=-\dfrac{\alpha^{16}+\beta^{16}}{(\alpha\beta)^{16}}=-(\alpha^{16}+\beta^{16})$

Þ $a+2b=-(\alpha^{16}+\beta^{16})$**，即** $b=-\dfrac{1}{2}[(\alpha^{16}+\beta^{16})+a]$

令 $T(n)=\alpha^n+\beta^n$**，且**$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$

$T(1)=1$，$T(2)=T^2(1)-2\alpha\beta=3$，$T(4)=T^2(2)-2\alpha^2\beta^2=7$

$T(8)=T^2(4)-2\alpha^4\beta^4=47$，$T(16)=T^2(8)-2\alpha^8\beta^8=2207$

故$\begin{cases} a=T(1)T(2)T(4)T(8)=1\times3\times7\times47=987 \\ b=-\dfrac{1}{2}[2207+987]=-1597 \end{cases}$

2. $\because f(x,x)=x$，$f(x,y)=f(y,x)$，$f(x,y)=\dfrac{y}{x+y}f(x,x+y)$，$x,y\in N$

$f(45,12)=f(12,45)=\dfrac{33}{45}f(12,12+33)=\dfrac{33}{45}f(12,33)$

$=\dfrac{33}{45}\cdot\dfrac{21}{33}\cdot f(12,21)=\dfrac{33}{45}\cdot\dfrac{21}{33}\cdot\dfrac{9}{21}f(12,9)=\dfrac{9}{45}f(9,12)$

$=\dfrac{9}{45}\cdot\dfrac{3}{12}f(9,3)=\dfrac{9}{45}\cdot\dfrac{3}{12}f(3,9)=\dfrac{9}{45}\cdot\dfrac{3}{12}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{3}{6}f(3,3)=\dfrac{9}{45}\cdot\dfrac{3}{12}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot3=\dfrac{1}{20}$

3.**不失其一般性可令其為**

請留意每一內角 ＝ $120°$

$3[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]+6[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]+7[-1,0]+x[-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}]+y[\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}]=0$

$\Rightarrow\begin{cases}x+y=9\\x-y=-7\end{cases}\Rightarrow x=1, y=8$

4. $\overline{CB}\cdot\overline{OD}=(\overline{OE}-x)(\overline{OE}+x)$

$=\overline{OE}^2-x^2=(\overline{OA}^2-y^2)-x^2$

$=(\overline{OA}^2)-(x^2+y^2)=a^2-b^2$

5. d(DE , AB) = d(E_1, E_2) **其中** E_1:△*DEF* **平面，** E_2:△*ABC* **平面**

$= \frac{1}{2}\overline{OG}$**，** *G* **為**△*ABC* **的重心**

$= \frac{1}{2}\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CG}^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2-(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2a)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

6. $2m+4$

(法一) $(2^m)^2+2(2^m)(2^{m+2})+(2^{m+2})^2=(2^m+2^{m+2})^2$**，故** $n=2m+4$

(法二)令 $2^{2m}+2^{2m+3}+2^n=\alpha^2$ Þ $2^n=\alpha^2-9\cdot 2^{2m}=(\alpha+3\cdot 2^m)(\alpha-3\cdot 2^m)>0$

Þ $\alpha=5\cdot 2^m$ Þ $2^n=2^{2m+4}$**，即** $n=2m+4$

∵**令** $\alpha+3\cdot 2^m=2^p$**，** $p>q$, $p,q\in Z$

$\alpha-3\cdot 2^m=2^q$**，所以** $2^p-2^q=3\cdot 2^{m+1}=2^q(2^{p-q}-1)$ Þ $q=m+1$, $p-q=2$

7. $r=x\cos\alpha+y\sin\alpha$**，** $s=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$

$r=\overline{OA}+\overline{H_1B}=x\cos\alpha+y\sin\alpha$

$s=\overline{PH_3}=\overline{PB}-\overline{H_1A}=y\cos\alpha-x\sin\alpha=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$

第二部分：計算證明題(每題 10 分)

(一)

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, $\forall a_i\ge 0$

$f(1)=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=8$

$f(2)=a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n=11$

$f(3)=a_0+3a_1+3^2a_2+\ldots+3^na_n=14$

$f(2)-f(1)=3=a_1+(2^2-1)a_2+(2^3-1)a_3+\ldots+(2^n-1)a_n$ ..(1)

$f(3)-f(2)=3=a_1+(3^2-2^2)a_2+(3^3-2^3)a_3+\ldots+(3^n-2^n)a_n$ ..(2)

(2)−(1)**：** $0=(3^2-2\cdot 2^2+1)a_2+(3^3-2\cdot 2^3+1)a_3+\ldots+(3^n-2\cdot 2^n+1)a_n$

但 $3^k-2\cdot 2^k+1>0$ $\forall k\ge 2, k\in N$

故 $a_2=a_3=\ldots=a_n=0$**，且** $a_1=3$, $a_0=5$

即 $f(x)=3x+5$**，故** $f(4)=17$

(二)

$a_1, a_2, a_3 \in N$

$a_2 = a_1 x$, $a_3 = a_2 y$, $20 = a_3 z$

即 $a_1 x y z = 20 = 2^2 \cdot 5$

∵ a_1, x, y, z 皆整除 20

$\Rightarrow$ 每一數皆型如 $2^a 5^b$ 且 $a = 0,1,2$, $b = 0,1$, $a, b \in N$

即將兩個 2 分給 a, x, y, z 四數，方法 10 種

同理將一個 5 分給 a, x, y, z 四數，方法 4 種

故共有方法 $10 \times 4 = 40$ 種

(三)(1)令 $[\frac{x}{4}] = [\frac{x}{3}] = k$，$k$ 為整數

$\Rightarrow$ $k \le \frac{x}{4} < k+1$，且 $k \le \frac{x}{3} < k+1$

(a) 若 $k \ge 0$, $4k \le x < 3k+3$, $k < 3$

k	0	1	2
x	0, 1, 2	4, 5	8

(b) $k<0$, $3k \le x < 4k+4 \Rightarrow k \ge -3$

k	-1	-2	-3
x	$-3, -2, -1$	$-6, -5$	-9

故共有 12 組解(如(a)(b))

(2)∵$m > 2$ 且 $x \in N \Rightarrow [\frac{x}{m}] \ge 0$

令 $[\frac{x}{m}] = [\frac{x}{m-1}] = k, k \ge 0$

$\Rightarrow$ $mk \le x < (m-1)(k+1)$ 且 $0 \le k < m-1$

對 $0 \le k \le m-2$ 的任意 k 而言，總有解 $m-(k+1)$個

但 $x = 0$，不為正整數，故共有解

$[\sum_{k=0}^{m-2} m-(k+1)] - 1 = \frac{(m+1)(m-2)}{2}$ 個

(四)只須證得 $\forall n \in N$，皆可表為 $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm (k-1)^2 \pm k^2$ ...(＊)之型式即可

由 $1 = 1^2$ $\quad$ $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$

$3 = -1^2 + 2^2$ $\quad$ $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$

∵$[(k+1)^2 - k^2] - [(k-1)^2 - (k-2)^2] = 4$

表連續 4 個正整數之平方和差

按：$5 = 1 + 4 = 1 + (2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2)$

$6 = 2 + 4 = [-1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2] + [5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2]$

$7 = 3 + 4 = -1^2 + 2^2 + (3^2 - 4^2 - 5^2 + 6^2)$

$8 = (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2)$

由以上討論每一個正整數皆可表為 $a + 4k$

其中 a 表已經能表出的(＊)式，且 $4k = \underbrace{4+4+\ldots+4}_{k個}$ 皆可仿上例表出

故每一個正整數皆可成功以(＊)型式表出

(五)設 $n = 3$，以 $\{ a, b, c \} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$觀察之，今任取兩數(任意順序下)

先取 a, b $\{ \underline{a}, \underline{b}, c \}$ ® $\{ a+b+ab, c \}$ ® $\{ a+b+c+ab+bc+ca+abc \}$

先取 a, c $\{ \underline{a}, b, \underline{c} \}$ ® $\{ b, a+c+ac \}$ ® $\{ a+b+c+ab+bc+ca+abc \}$

先取 b, c $\{ a, \underline{b}, \underline{c} \}$ ® $\{ a, b+c+bc \}$ ® $\{ a+b+c+ ab+bc+ca+abc \}$ 其結果不因順序而改變

此即$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ ® $\{ 3 \}$ ($\because (1+a)(1+b)(1+c) - 1 = a+b+c+ab+bc+ca+abc$)

將它推廣至$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\}$其結果必剩下一數 P

$$P = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\ldots(1+\frac{1}{n}) - 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \frac{n+1}{n} - 1 = (n+1) - 1 = n$$