北一女中八十九學年度數學競試(高二、三組)解答

1. 解：由二項式定理知：$(m+n)^n = m^n + nm^{n-1}n + \cdots + C^n_{n-1} \cdot m \cdot n^{n-1} + C^n_n n^m$

   因此可知 $n^n < 2000$ 可得 1or 2or 3 or 4

   (1) 當 n=1 時，(m+1)=m+2000，不可能

   (2) 當 n=2 時，$(m+2)^2 = m^2 + 2000$，即 m=499，所以(m,n)=(499,2)一組解。

   (3) 當 n=3 時，$(m+3)^3 = m^3 + 2000$，即 $9m^2 + 27m + 27 = 2000$，又 $9m^2 + 27m + 27$ 為 3 的倍數，所以此式無解。

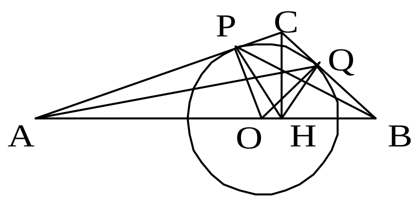
   (4) 當 n=4 時，$(m+4)^4 = m^4 + 2000$，即 $16m^3 + 96m^2 + 256m + 256 = 2000$，亦即 $m^3 + 6m^2 + 16m = 109$ 而 m=1,2,3 都不合，$m \geq 4$ 時，左式>109，所以此式無解。

   因此，此方程式恰有一組正整數解，m=499,n=2。

2. 如右圖

   (1) $\angle CPO = \angle CQO = \angle CHO = 90°$，所以 C、P、O、H、Q 共圓且 $\overline{CO}$ 為直徑，

   又 $\overline{CP}$、$\overline{CQ}$ 為圓 O 的兩切線，所以



   $\overline{CP} = \overline{CQ}$，因此 $\angle CHP = \angle CHQ$，即 $\overline{CH}$ 為 $\angle PHQ$ 的角平分線。

   (2) ΔAPO 與 ΔAHC 中，$\angle APO = \angle AHC = 90°, \angle PAO = \angle HAC$，所以

   $\Delta APO \sim \Delta AHC$，因此 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{PO}}{\overline{HC}} \cdots (1)$

   同理 $\Delta BOQ \sim \Delta BCH$，因此 $\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BH}} = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{HC}} \cdots (2)$

   由(1)(2)及 $\overline{PO} = \overline{OQ}$，可知 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BH}}$,

   又 $\overline{CP} = \overline{CQ}$，所以 $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PA}} \times \dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}} \times \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AP}} \times \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BH}} = 1$，因此，由西瓦定理可知

   $\overline{AQ}, \overline{BP}, \overline{CH}$ 三線共點。

3. 解:$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = b^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = ab^2 + b^3 + cb^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = b^2(a+c)$

   $\Leftrightarrow a^2 + c^2 - ac = b^2$ (因為 $a + c \neq 0$)

   由餘弦定理知 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos b$,所以 $\cos b = \dfrac{1}{2}$,即 $\angle B = 60°$.

4. 解:設 x=n+y,其中 n 為整數，$0 \leq y < 1$

則[x]+[2x]+[4x]=[n+y]+[2n+2y]+[4n+4y]=n+[y]+2n+[2y]+4n+[4y]

即[x]+[2x]+[4x]=7n+[y]+[2y]+[4y]=2000

(1) **當** $0 \le y < \frac{1}{4}$,**原式化為** 7n=2000,**此式無解**

(2) **當** $\frac{1}{4} \le y < \frac{2}{4}$,**原式化為** 7n+1=2000,**此式無解**

(3) **當** $\frac{2}{4} \le y < \frac{3}{4}$,**原式化為** 7n+1+2=2000,**此式無解**

(4) **當** $\frac{3}{4} \le y < 1$,**原式化為** 7n+1+3=2000,**此式無解**

所以此式無解。

5. **解：令** $1+9+9^2+\cdots+9^{n-1}=\frac{1-9^n}{1-9}=\frac{9^n-1}{8}=y^2, y\in N$

則 $9^{n-1}=8y^2$,**即** $(3^n+1)(3^n-1)=8y^2$,**又** $(3^n+1,3^n-1)=2$,(**易證**)

則可得(1) $\begin{cases}3^n+1=4u^2\\3^n-1=2v^2\end{cases}$,u、v **互質或**(2) $\begin{cases}3^n+1=2u^2\\3^n-1=4v^2\end{cases}$,u、v **互質**

由(1)**得** $3^n=4u^2-1=(2u+1)(2u-1)$,**但** $(2u+1,2u-1)=1$,**所以** $\begin{cases}2u+1=3^n\\2u-1=1\end{cases}$ **得**

u=1,n=1 **與條件不合**

由(2)**得** $3^n=4v^2+1$,**對** v=3k、3k+1 or 3k+2 **而言，** $4v^2+1$ **不可能是** 3 **的倍數，**
所以此式無解，即可確定此問題 n **不存在。**

6. **解**:**由已知條件可知，樟樹最多** 4 **棵**

(1) **樟樹一棵時**,**有** 7 **種種法**

(2) **樟樹二棵時**,**有** 15 **種種法**($\frac{7!}{2!5!}-\frac{6!}{5!}=15$ **窮舉法亦可**)

(3) **樟樹三棵時**,**有** 4 **種種法**(**窮舉法**)

(4) **樟樹四棵時**,**有** 1 **種種法**

所以共有 4+7+15+4+1=31 **種種法**