

北一女中 89 學年度數學競試(高一組)詳解

一. 填充題(每題八分) 24%

1. 21

2. $\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)}{x^2-x+1}$

3. 3

二.

$$1. P \geq 0, Q \geq 0 \Rightarrow P+Q \geq 0 \quad ; \quad P^2 \geq Q^2 \Leftrightarrow P^2 - Q^2 \geq 0 \Leftrightarrow (P-Q)(P+Q) \geq 0 \\ \Leftrightarrow P-Q \geq 0 \Leftrightarrow P \geq Q$$

$$2. (|a|+|b|)^2 - (a+b)^2 = (a^2 + 2|ab| + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2) = 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ \Rightarrow (|a|+|b|)^2 \geq (a+b)^2 \Rightarrow |a|+|b| \geq |a+b|$$

$$3. |x-3| \leq k \text{ 且 } |y-3| \leq 2k \Rightarrow |x-3| \leq k \text{ 且 } |3-y| \leq 2k \\ \Rightarrow |(x-3) + (3-y)| \leq |x-3| + |3-y| \\ \Rightarrow |x-y| \leq k + 2k \\ \Rightarrow |x-y| \leq 3k$$

三. 反證法

設 $f(x)=0$ 有兩個相異的實根 z_1, z_2 且 $z_1 < z_2$, 則
 $f(z_1) = f(z_2) = 0$ 與 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 矛盾
因此, $f(x)=0$ 最多只有一個實根。

四.

1. 0、1、4

2. $x^2 + 10ax + (5b-2) = 0$ 的根是 $-5a \pm \sqrt{25a^2 - 5b + 2}$

$$a \in \mathbf{Z} \Rightarrow -5a \in \mathbf{Z}, \quad -5a \pm \sqrt{25a^2 - 5b + 2} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow 25a^2 - 5b + 2 \in \mathbf{Z}$$

$$25a^2 - 5b + 2 \text{ 除以 } 5 \text{ 的餘數是 } 2,$$

$$\Rightarrow 25a^2 - 5b + 2 \text{ 不為整數的平方} \Rightarrow x^2 + 10ax + (5b-2) = 0 \text{ 無整數解}$$

五. $x9:9y = x:y$

$$\Rightarrow (10x+9):(90+y) = x:y \Rightarrow 9xy - 90x + 9y = 0 \Rightarrow xy - 10x + y = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(y-10) + 10 = 0 \Rightarrow (x+1)(y-10) = -10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ y-10=-5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+1=5 \\ y-10=-2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+1=10 \\ y-10=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=9 \\ y=9 \end{cases} \text{ (不合)} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$$

六.

過B點作 \overline{DC} 的平行線與 \overline{AM} 的延長線交於E點

$$\overline{OD} \parallel \overline{BE} \Rightarrow \overline{DO} : \overline{BE} = \overline{AD} : \overline{AB} \quad (1)$$

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \triangle ODE \sim \triangle OCB$$

$$\Rightarrow \overline{DO} : \overline{OC} = \overline{DE} : \overline{CB} \quad (2)$$

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{DE} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{AB} \quad (3)$$

$$(2)(3) \text{ 二式} \Rightarrow \overline{DO} : \overline{OC} = \overline{AD} : \overline{AB} \quad (4)$$

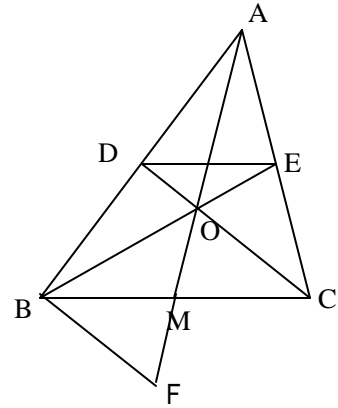
$$(1)(4) \text{ 二式} \Rightarrow \overline{DO} : \overline{BE} = \overline{DO} : \overline{OC}$$

$$\Rightarrow \overline{BE} = \overline{OC}$$

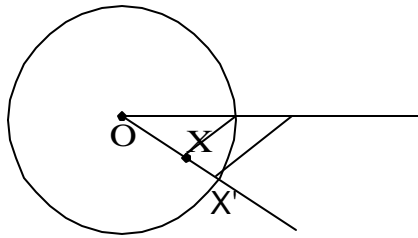
$$\overline{BF} \parallel \overline{OC} \text{ 且 } \overline{BE} = \overline{OC}$$

\Rightarrow 四邊形BECO是平行四邊形

$$\Rightarrow \overline{BM} = \overline{CD}$$



七、 1.



2.

$$\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'} = r^2 \Rightarrow \overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB'} : \overline{OA'}$$

$$\text{又 } \angle AOB = \angle B'OA' \quad \triangle OBA \approx \triangle OA'B'$$

