北 一 女 中 88 學 年 度 數 學 競 試 （ 高 二 高 三 組 ） 參 考 答 案

[問題一]每題 8 分共計 32 分

(甲)1999000　(乙)$2k-2$　(丙)$\frac{3\pi}{4}$　(丁)36

[問題二]8 分

依題意$(x+\sqrt{x^2+1})=\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\sqrt{y^2+1}-y$　---①

$(y+\sqrt{y^2+1})=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}-x$　---②

①+②　$x+y+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}-(x+y)$

故 $x+y=0$

[問題三]15 分

S=$\frac{1}{2}ab\sin c$ 代入不等式即證 $a^2+b^2+c^2-2ab\sqrt{3}\sin c\geq 0$

按餘弦定律 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos c$ 代入上左式

$a^2+b^2+(a^2+b^2-2ab\cos c)-2\sqrt{3}ab\sin c$

$=2(a^2+b^2)-2ab(\cos c+\sqrt{3}\sin c)$

$=2(a-b)^2+4ab-2ab(\cos c+\sqrt{3}\sin c)$

$=2(a-b)^2+2ab[2-(\cos c+\sqrt{3}\sin c)]$

$=2(a-b)^2+2ab[2-2\sin(c+\frac{\pi}{6})]\geq 0$

故 $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}$ S

S=$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$\leq\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^3}{27}}$

$\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{4\cdot 3\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(a^2+b^2+c^2+2(ab+ca+bc)}{4\cdot 3\sqrt{3}}$

$\leq\dfrac{(a^2+b^2+c^2)+2(a^2+b^2+c^2)}{3\cdot 4\sqrt{3}}$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}$ S

[**問題四**]15 **分**

依題意 $f(n)=\begin{cases} n-2\ ;\ n>2000 \\ f(f(n+16))\ ;\ n\leq 2000 \end{cases}$

首先找出其通式過程如下

$f(2000)=f(f(2016))=f(2004)=1992$
$f(1999)=f(f(2015))=f(2003)=1991$
$f(1998)=f(f(2014))=f(2002)=1990$
$f(1997)=f(f(2013))=f(2001)=1989$
$f(1996)=f(f(2012))=f(2000)=1992$
$f(1995)=f(f(2011))=f(1999)=1991$
$f(1994)=f(f(2010))=f(1998)=1990$
$f(1993)=f(f(2009))=f(1997)=1989$
$f(1992)=f(f(2008))=f(1996)=1992$
$f(1991)=f(f(2007))=f(1995)=1991$
$f(1990)=f(f(2006))=f(1994)=1990$
$f(1989)=f(f(2005))=f(1993)=1989$
$f(1988)=f(f(2004))=f(1992)=1992$
$f(1987)=f(f(2003))=f(1991)=1991$
$f(1986)=f(f(2002))=f(1990)=1990$
$f(1985)=f(f(2001))=f(0989)=1989$ (1)
$\vdots$

於是猜測:對於非負整數 $k,(k\leq 499),m=0,1,2,3$

有 $f(2000-4k-m)=1992-m$ (2)

對於非負整數 k **用數學歸納法,由**(1)**知** $k=0,1,2,3$ **時**(2)**式為真,假設當** $k\leq t$ **時**,$(t\geq 3)$,

有 $f(2000-4k-m)=1992-m,\ m=0,1,2,3$

考慮 $k=t+1$ **時,證** $n=2000-4(t+1)-m\leq 2000$

此時 $t+1\geq 4,\ m\geq 0$,**得** $f(n)=f(f(n+16))=f(f(2000-4(t+1)-m)$

$=f(1992-m)$ (**歸納假設**)

$=1992-m$ (**利用**(1))

故由歸納法得知公式(2)**成立,故**

(一)$f(n)=\begin{cases} n-12,\text{當 } n>2000 \\ 1992-m,\text{當 } n=2000-4k-m,\text{其中 } m=0,1,2,3\ ,\ k<499\ ;\ k \text{ 為非負整數} \end{cases}$

(二)**利用**(一)**欲使** $f(n)=n$ **成立**$\Rightarrow n<2000$ **且** $2000-4k-m=1992-m\Rightarrow k=2$ **且** $n=1992-m$, $m=0,1,2,3$

故 $f(n)=n$ **的正整數求解為** 1992,1991,1990,1989

[**問題五**]15 **分**

(1)**先就** $n=1,2,3,4,5$ **觀察如下**:

$(\sqrt{2}\ 1)^1=\sqrt{2}-1$
$(\sqrt{2}-1)^2=\sqrt{9}-\sqrt{8}$
$(\sqrt{2}-1)^3=\sqrt{50}-\sqrt{49}$
$(\sqrt{2}-1)^4=\sqrt{289}-\sqrt{288}$
$(\sqrt{2}-1)^5=\sqrt{1682}-\sqrt{1681}$

由(1)**討論,猜測如下**:

當 n **為奇數時,存在正整數** a,b,**使**$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{2a^2}-\sqrt{b^2}$,**此時** $2a^2=b^2+1$

當 n **為偶數時,存在正整數** a,b,**使**$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2}$,**此時** $a^2=2b^2+1$

現在由於(1)**知道,僅需對於** $n>5$ **時按數學歸納法證明上式推測真即可**.

證明如下:

假設 $n=k$ **時猜測為真**,($k\geq 5$),**此時欲證明** $n=k+1$ **為真**

(i)**如果** k **是奇數,按歸納假設,有** $a,b\in N$ **使**$(\sqrt{2}-1)^k=\sqrt{2a^2}-\sqrt{b^2}$; $2a^2=b^2+1$

提$(\sqrt{2}-1)^{k+1}=(\sqrt{2}\,a-b)(\sqrt{2}-1)=(2a+b)-(a+b)\sqrt{2}=\sqrt{(2a+b)^2}-\sqrt{2(a+b)^2}$

此時$(2a+b)^2-2(a+b)^2=2a^2-b^2=1$

由於 k **為奇數**$\Rightarrow k+1$ **為偶數,故滿足猜測**.

(ii)**如果** k **是偶數**,($k\geq 5$),**有** $a,b\in N$ **使**$(\sqrt{2}-1)^k=\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2}=a-b\sqrt{2}$;$a^2=2b^2+1$

則
$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^{k+1}&=(\sqrt{2}-1)^k(\sqrt{2}-1)\\&=(a-b\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)\\&=(a+b)\sqrt{2}-(a+2b)\\&=\sqrt{2(a+b)^2}-\sqrt{(a+2b)^2}\end{aligned}$$

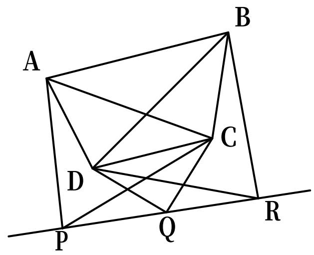
此時 $2(a+b)^2-(a+2b)^2=a^2-2b^2=1$

推測亦真

由(i)(ii)**證得** $n=k+1$ **亦真,故本題得證**.

[**問題六**]15 **分**

[**證一**]**利用三角形全等及鄰角互補證明**



(1)$\triangle CBD$ **及**$\triangle QRD$ **全等理由如下**:

$\overline{CD}=\overline{DQ}$; $\overline{DB}=\overline{PR}$;$\angle CDB=60°-\angle CDR=\angle QDR$

故$\triangle CDB\cong\triangle QRD$ (S.A.S)

同理可證$\triangle CDA\cong\triangle CQP$ (S.A.S)

(2)**由**(1)**知**$\angle DCB=\angle DQR$;$\angle CDA=\angle CQP$

故
$$\begin{aligned}\angle DQR+\angle DQP&=\angle DQR+(\angle CQP-60°)\quad ,(\angle CQD=60°)\\&=(\angle DQR+\angle CQP)-60°\\&=(\angle DCB+\angle CDA)-60°\\&=(360°-\angle DAB-\angle CBA)-60°\quad ,(\text{四邊形內角和 }360°)\\&=360°-(120°)-60°=180°\end{aligned}$$

故 P,Q,R **三點共線**

[**證法二**]**利用向量,配合複數,為了方便起見,將它互化以簡化過程,即欲證**$\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{QR}$

規定$\overrightarrow{DC}=Z_1$, $\overrightarrow{DA}=Z_2$, $\overrightarrow{DB}=Z_3$

由於$\angle DAB+\angle CBA=120°\Rightarrow\overrightarrow{CA}$ **與**$\overrightarrow{CB}$**夾角** 60°,**且**$\left|\vec{DA}\right|=\left|\vec{CB}\right|$ (DA=CB **為已知**)

故$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ **旋轉**(-60°)**而得**$=Z_2$ù; ù=cos(-60°)+isin(-60°)

現在將$\overrightarrow{DP}$,$\overrightarrow{DQ}$,$\overrightarrow{DR}$ **分別以**$\overrightarrow{DC}$ **及**$\overrightarrow{DA}$ **表出如下**:

$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{DA}$+($\overrightarrow{AC}$ **旋轉**-60°**而得向量**)$=Z_2+(Z_1-Z_2)$. ω$=Z_1$ù+(1-ù)Z_2

$\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DC}$ **旋轉**(-60°)**而得**$=Z_1$. ω

$\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{DB}$ **旋轉**(-60°)**而得**=($\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$)**旋轉**(-60°)**而得**=($Z_1+Z_2$ù). (ù)$=Z_1$ù$+Z_2$ù^2

故$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{PQ}$=(1–ù)$Z_2$=$(1-\dfrac{+1+-\sqrt{3}i}{2})Z_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}Z_2$

$\overrightarrow{QR}=Z_2$ù^2=cos(-120°)+isin(-120°)$Z_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}Z_2$ **即**$\overrightarrow{QR}=-\overrightarrow{QP}\Rightarrow$ P,Q,R **三點共線且** Q **為**$\overline{PR}$**中點**.