

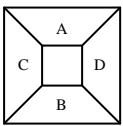
北一女中學 88 學年度數學競試 (高一組) 試題

注意事項：

1. 本試 共有 七 大 題 ， 每 題
2. 考試時間：二小時。
3. 請 將 答 案 寫 在 答 案 上 ，
4. 不可使用計算器。

問題一(5 分)“黑板寫了一個數，你將它擦掉後再寫出一個數，你寫出的數，必須是你擦掉的數的 5 倍或平分，這樣的動作，稱為一個步驟。”現在黑板上已寫了一個數“1”，請問能否“十個步驟”完成時，將它改寫成 5^{45} ？如果能，請你將各步驟表示出來。

問題二(5 分)如下左圖，一個小正方形在大正方形內，且兩組對邊均互相平行。將圖中 A、B 兩區域塗紅色，C、D 兩區域塗綠色。試證：紅色區域與綠色區域面積一樣大。



問題三(15 分)設 x 、 y 、 z 為三個全相異且全不為 0 的數，且 $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$ 證明：

$$x^2 y^2 z^2 = 1。$$

問題四(15 分)若直角三角形 ABC 的內切圓半徑為 r ，外接圓半徑為 R ，且 ABC 的面積等於 S ，

$$\text{證明： } r + R > \sqrt{2S}。$$

問題五(20 分)一數列第一項為 7，從第二項開始各項依下列規定方法求得：每一項是它的前一項的平方後，各個數字的和再加 1，如：第二項的求法： $7^2=49$ ， $4+9+1=14$ ，所以第二項是 14，第三項： $14^2=196$ ， $1+9+6+1=17$ ，第三項是 17。試依此規定，求這個數列的第 1997 項？

問題六(20 分)設銳角三角形 ABC 中， $\overline{CA} > \overline{CB}$ ，且 \overline{AP} 、 \overline{BQ} 、 \overline{CR} 為三邊的，P、Q、R 分別在

邊上，M 為 \overline{AB} 中點，且直線 AB 與直線 PQ 交於 N。若 k_1 是 $\triangle PQC$ 的外接圓， k_2

是 $\triangle RPN$ 的外接圓，證明：直線 MP 是圓 k_1 與圓 k_2 的公切線。

問題七(20 分)試找出所有的質數 P，使 P^2+11 恰有 6 個正因數，並證之。