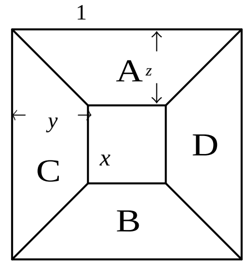
北 一 女 中　８８　學 年 度 數 學 競 試 (高 一 組) 參 考 答 案

問題一(5 **分**) **能。各步驟的過程如下：**

1　1　5　5^2　5^4　5^5　5^{10}　5^{11}　5^{22}　5^{44}　5^{45}

問題二(5 **分**) **證明：不失一般性，可設大正方形的邊長為** 1，
如圖，各線段的長度如圖中所示:：



A **與** B **區域的面積和**=$\dfrac{(1+x)z}{2}+\dfrac{(1+x)(1-z-x)}{2}=\dfrac{1-x^2}{2}$

C **與** D **區域的面積和**=$\dfrac{(1+x)y}{2}+\dfrac{(1+x)(1-y-x)}{2}=\dfrac{1-x^2}{2}$

所以本命題成立。

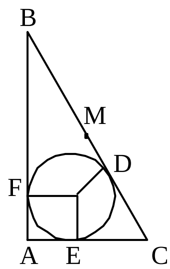
問題三(15 **分**) $x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}\\ y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}\\ z+\dfrac{1}{x}=x+\dfrac{1}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-y)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{y-z}{yz}\\ (y-z)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{z-x}{zx}\\ (z-x)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-y}{xy}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}yz(x-y)=y-z\\ yx(y-z)=z-x\\ xy(z-x)=x-y\end{cases}$　　**又** $x-y\neq 0, y-z\neq 0, z-x\neq 0$

所以 $y^2z^2x^2=1$ **得證**

問題四(15 **分**)**不妨設**　A=90　，**如下圖，令** D、E、F **分別為切點，** M **為** $\overline{BC}$ **中點，則**

$\overline{BC}=2\overline{BM}=2\overline{AM}=2\overline{MC}=2R,$



令 $\overline{BF}=x,\overline{CD}=y,$**則** $\overline{BD}=x,\overline{CE}=y,$

ABC **的面積**=$\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\dfrac{1}{2}(r+x)\cdot(r+y)=S$

所以， $2S=(r+x)(r+y)=r^2+r(x+y)+xy=r^2+2rR+xy$

但 $x+y=2R$，**且** $x\neq y$，**所以** $\dfrac{x+y}{2}>\sqrt{xy}\Rightarrow R^2>xy$

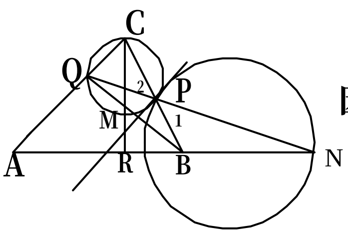
$\therefore 2S=r^2+rR+xy<r^2+rR+R^2=(r+R)^2$ **即** $r+R>\sqrt{2S}$

問題五(20 分)**由數列定義的規則，我們逐步找出各項及其特性得下列結果：由第一項開始，如下：**7,14,17,20,5,8,11,5, ……**也就是第** 5 **項開始，它是一個周期性數列，因此可推算第** 1999 **項是** 11。

問題六(20 **分**)**下面我們分別證明** $\overline{MP}$ **是** k_1,k_2 **的切線。**

(i) **易知圓** k_1**，即**△CPQ **的外接圓以** $\overline{CH}$ **為直徑，所以** $\overline{MP}$ **為** k_1 **的切線**

$$\Leftrightarrow \angle APM=\frac{1}{2}H\widehat{P}=\angle HQP$$



因為△APB **中** $\angle APB=90^\circ$，M **為斜邊中點，**

所以 $\overline{AM}=\overline{PM}=\overline{BM},\angle MAP=\angle APM,$

又 $\angle MAP=\angle BCR=\angle BCH=\angle HQP$**，所以** $\angle APM=\angle HQP$**，因此** $\overline{MP}$ **就是圓** k_1 **的切線。**

(ii) $\overline{MP}$ **就是圓** k_2 **的切線** $\Leftrightarrow \angle RPM=\frac{1}{2}R\widehat{P}=\angle PNR$

又 $\angle MPB=\angle MBP=\angle 1+\angle PNR=\angle 2+\angle PNR$

又 $\angle MPB=\angle MPR+\angle RPB$**，所以** $\angle MPR=\angle PNR \Leftrightarrow \angle RPB+\angle 2$

上式關係是正確的，因為△ABC **的垂心** H **是**△PQR **的內心，且** $\angle APC=\angle APB=90^\circ$**，事實上，我們也可證明：**△ABC~△ PQC~△PBR~△AQR。

(**因為** $\angle PRB=\angle PHB=\angle QCP=\angle ACB,\angle PBR=\angle ABC$

$\therefore$△ABC~△PBR,**同理可證其他相似。**)**所以可確定** $\overline{MP}$ **就是圓** k_2 **的切線。至此，本命題已證。**

問題七(20 **分**)**我們從最小的質數** P **開始，來找尋** P^2+11 **的特性：**

P=2，$P^2+11=15$，**它的正因數有** 4 **個；**

P=3，$P^2+11=20$，**它的正因數恰有** 6 **個；**

P=5，$P^2+11=36$，**它的正因數超過** 6 **個；**

P=7，$P^2+11=60$，**它的正因數超過** 6 **個；**

P=11，$P^2+11=132$，**它的正因數超過** 6 **個；**

從上面的結果，我們發現，P>3 **時，**P^2+11 **都是** 12 **的倍數且大於** 12。**它們的正因數都超過** 6 **個**(**因為** 12 **的正因數恰有** 6 **個**)。**如果對於** 3 **的質數** P **都是** 12 **的倍數且大於** 12，**那麼，滿足** P^2+11 **恰有** 6 **個正因數的質數** P **就恰有一個** P=3 **滿足條件。**

證`明：我們猜測 $P^2+11=(P^2-1)+12=(P-1)(P+1)+12$，**因為** P **是質數，所以** P+1、P-1 **都是** 2 **的倍數，又**(P-1)P(P+1)**三個連續整數的積為** 3 **的倍數，但** P **為大於** 3 **的質數，所以**(P-1)(P+1)**必為** 3 **的倍數且為** 12 **的倍數，因此** P^2+11 **為** 12 **的倍數，得證。**