

# 北一女中 87 學年度數學競試 ( 高二高三組 ) 試題

請依下面各題所需作答

1.(A)設  $a, b$  為兩正數, 比較  $\frac{4}{a+b}$  與  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的大小 ( 50% )

(B)若  $a, b, c, d$  是 4 個正數, 證明  $\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4$ ,

並討論等號成立的充要條件(10%)

2.設  $x$  為實數且  $|x| < \frac{\pi}{2}$ , 證明  $\sin^2 x + (1 - \cos x)^2 \leq x^2$  ( 10% )

3.設  $I$  為  $\triangle ABC$  的內心(內切圓圓心), 求當 " $\triangle BIC$  與  $\triangle CIA$  的面積和等於  $2\triangle AIB$  的面積" 時,  $\angle C$  的最大值為何? ( 10% )

4.一個實心正方體, 一把刀切下去, 在切平面上呈現的多邊形, 最多是幾邊形?說明理由。( 10% )

5. (A)一定圓, 已知等腰三角形  $ABC$  與此圓外切, 且  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ,  $\triangle DEF$  也是此圓的外切三角形,

且  $E, F$  分別在  $BC$  線上,  $D$  在過  $A$  且平行  $BC$  的線上,  $D \neq A$ ,

證明:  $\triangle DEF$  的面積大於  $\triangle ABC$  的面積 (10%)

(B)試證:一個定圓的外切三角形中, 以正三角形面積最小。( 15% )

6.求方程式  $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases}$  的實數解。( 10% )

7.小華的書桌上有一個書架, 分成 3 格(每格可插入 5 本書), 現在小華有 5 本不同的書任意插入書架內, 有多少插法? ( 10% )

8.能不能畫出 6 條線, 使每條線都恰好跟另外 4 條相交?如果可以的話, 請畫出來。( 10% )