北一女中 87 學年度數學競試(高二高三組)參考答案

1. (A)因為 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{b^2+ab+a^2+ab-4ab}{ab(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\geq 0$， $\forall a,b>0$

   所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$

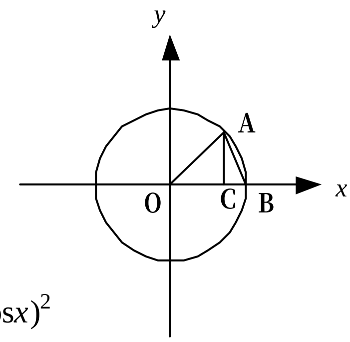
   (B) $\frac{d+c}{d+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a} = (a+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d})+(b+d)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a})$

   $\geq (a+c)\frac{4}{a+b+c+d}+(b+d)\frac{4}{a+b+c+d} = 4$ (此不等式由(A) 即得)

   由(A)的過程知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow a=b$

   因此(B)式等號成立的充要條件為 $\begin{cases}a+b=c+d\\b+c=a+d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$

2. 在單位圓上考慮，如圖取 $A(\cos x,\sin x)$， $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

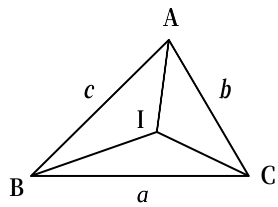


   作 $\overline{AC}\perp\overline{DB}$，C 在 x 軸上，則 $\overline{AC}=|\sin x|$， $\overline{OC}=\cos x$ 且 $\overline{BC}=1-\cos x$

   由於 ÄABC 為直角三角形，所以 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\sin^2 x+(1-\cos x)^2$

   又(弧 AB) $>\overline{AB}$ 即 $x>\overline{AB}$， 所以 $\sin^2 x+(1-\cos x)^2\leq x^2$.

3. 如圖 (示意圖)，設 ÄABC 的三邊長 a , b , c，且內切圓半徑為 r，則由題設得



   $\frac{1}{2}(a+b)r=2(\frac{1}{2}cr)$，即得 $a+b=2c$

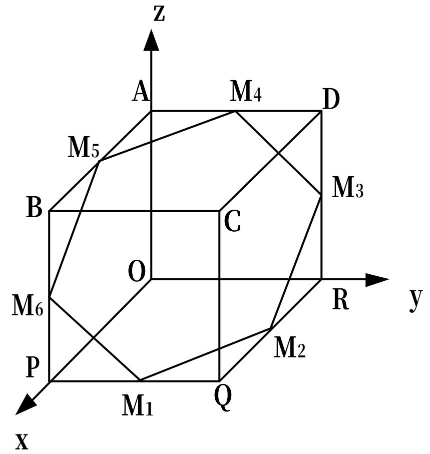
   由正弦定理得 $\sin A+\sin B=2\sin C\Rightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2})$

   $\Rightarrow\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\Rightarrow\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

   即得 $\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{2}$ 又 $0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$

   所以 $\frac{C}{2}=30°$ 時， $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$ 最大，即 $C=60°$.

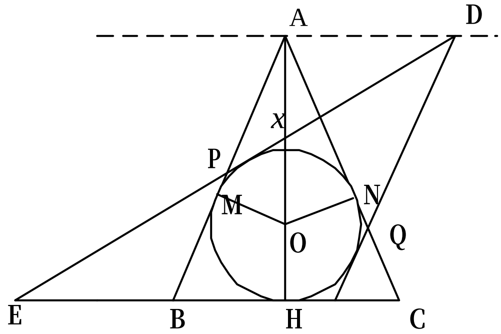
4. 不失一般性，如圖的正方體 ABCD-OPQR (邊長為 2)



(i)當一平面從 $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RD}$ 的各邊中點 M_1, M_2, M_3 切過去時，此平面並過 M_4, M_5, M_6 ,因為 M_1, M_2, M_3 三點決定的平面方程式為 $x+y+z=3$ 又 M_4, M_5, M_6 顯然在此平面上 .

(ii)平面 $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ 與原來的六個面都相交且交於六條相異直線，所以六邊形必為切平面邊數的多邊形 .

5.(i) 欲證: $\triangle DEF > \triangle ABC$ (如圖)



即證 $\overline{EF} > \overline{BC}$ 即可，亦即證 $\overline{EB} > \overline{FC}$ 即可

證:(1)設 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DE}$ 交於 P， $\overline{AC}$ 與 $\overline{DF}$ 交於 Q

$\triangle ADQ \sim \triangle CFQ$ 且 $\triangle ADP \sim \triangle BEP$ 所以

$\dfrac{\overline{FC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}$ 且 $\dfrac{\overline{EB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{AP}}$

(2) $\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} < \dfrac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{AM}} < \dfrac{\overline{BP}}{\overline{AP}}$ 所以 $\dfrac{\overline{FC}}{\overline{AD}} < \dfrac{\overline{EB}}{\overline{AD}}$，即得 $\overline{EB} > \overline{FC}$

因此 $\triangle DEF > \triangle ABD$ 成立

(ii)如上圖，已知等腰三角形 ABC 為圓 O 的外切三角形

欲證:當 $\triangle ABC$ 面積最小時，$\triangle ABC$ 為正三角形

證: (1)設圓 O 的半徑為 r，且 $\overline{OA} = x$，則 $\triangle ABC$ 的面積 $= (\overline{AB} + \dfrac{1}{2}\overline{BC})r$

(2) $\triangle ABH \sim \triangle AOM \Rightarrow \dfrac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{MO}}{\overline{AM}} \Rightarrow \overline{BH} = \dfrac{r(x+r)}{\sqrt{x^2-r^2}} = \dfrac{r\sqrt{x^2-r^2}}{x-r}$

(3)因此 $\triangle ABC$ 的面積$= r(\sqrt{x^2-r^2} + \overline{BM} + \dfrac{1}{2}\overline{BC}) = r(\sqrt{x^2-r^2} + 2r\dfrac{\sqrt{x^2-r^2}}{x-r})$

$= r\sqrt{x^2-r^2}\,(\dfrac{x+r}{x-r}) = r\sqrt{\dfrac{(x+r)^3}{x-r}}$

(4)欲使 $\triangle ABC$ 的面積最小 $\Leftrightarrow \dfrac{x-r}{(x+r)^3}$ 最大,($x > r$) $\Leftrightarrow \dfrac{r^2(x-r)}{(x+r)^3}$ 最大, ($x > r$)

$\Leftrightarrow (\dfrac{r}{x+r})^2(\dfrac{x-r}{x+r})$ 最大,($x > r$)

由算幾不等式知 $\dfrac{r}{x+r} + \dfrac{r}{x+r} + \dfrac{x-r}{x+r} \geq 3\sqrt[3]{(\dfrac{r}{x+r})^2(\dfrac{x-r}{x+r})}$

即 $\dfrac{r^2(x-r)}{(x+r)^3} \le \dfrac{1}{27}$ 且在 $\dfrac{r}{x+r} = \dfrac{x-r}{x+r}$ 時，有最大值，即 $x = 2r$ 時，ÄABC 的面積最小，此時∠*OAM=30* º,即∠*A=60* º,也就是 ÄABC 為正三角形時，它是所有外切三角形中面積最小的.

6. $\begin{cases} x+y+xy=11........(1) \\ x^2+xy+y^2=19......(2) \end{cases}$

由(1) + (2)得 $(x+y)^2+(x+y)-30=0 \Rightarrow (x+y+6)(x+y-5)=0 \Rightarrow x+y=-6$ 或 $x+y=5$

(i)當 $\begin{cases} x+y=-6 \\ x+y+xy=11 \end{cases}$ 時，$y = -(x+6)$ 且 $x^2 + 6x + 17=0$ 此時方程組無實數解

(ii)當 $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=19 \end{cases}$ 時，可得 $(x, y) = (3, 2)$ 或 $(2, 3)$

所以，原方程組之實數解 $(x, y) = (3, 2)$ 或 $(2, 3)$

7. 書架分 A,B,C 三格，如果不考慮書的次序，只考慮 A,B,C 三格的書的量時，5 本書有 21 種分配法（$H^3_5=21$，由窮舉法亦可得)，再考慮 5 本不同的書時，插入書架內的方法有 $21\times5!$ 種方法

8. 可以畫如右

三組平行線可滿足題意所求 .