

北一女中 87 學年度數學競試 (高一組) 試題

注意事項：1.時間分配：兩小時

2.每大題各佔 10 分，共 100 分

甲、對任意的自然數(正整數) n ，求證 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ ；

又你是否能進一步比較 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ 與 $\frac{61}{36}$ 何者較大？

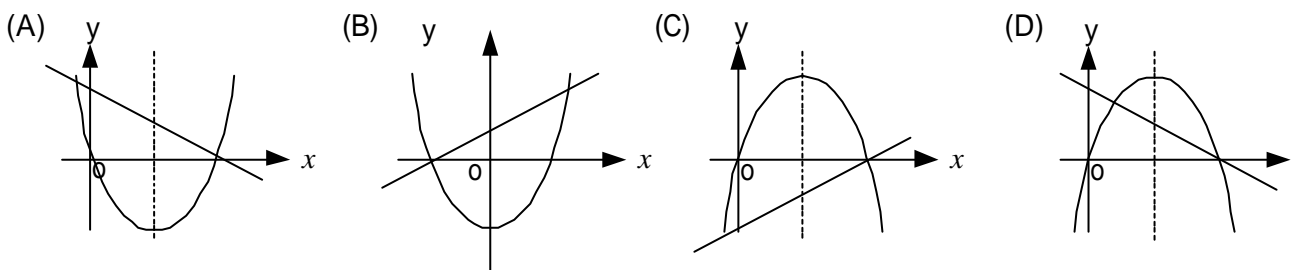
乙、求出與 $(4 + \sqrt{15})^4$ 最接近的正整數來。

丙、某 n 位學生，每人各自分別帶了 $1, 2, \dots, n$ 彼此不相同個數的彈珠，現在將彈珠全部集中後，平均分配給每一位學生，若每人平均分 10 個，則有剩下，若每人平均分 11 個，則不夠分配，問這群學生人數有多少人？

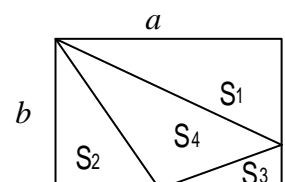
丁、某冊書籍頁碼編號自 $1 \sim n$ 共 n 個連續整數，阿仁及阿強同時分別自 1 加到 n ，今只知道他們兩人其中一人在加的過程中重複多加一數 a ，另一人卻漏加一數 b ，結果得數分別為 20138 及 20051，試問 a, b 分別是多少？

戊、設函數 $f(x)$ 滿足 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ 對於每一個正數 x 都成立，試求 $f(x)=0$ 時之 x 值為何？

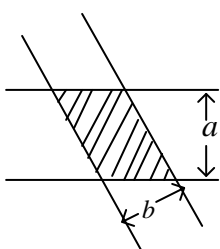
己、 $y = ax^2 + bx$ 與 $y = ax + b (b \neq 0)$ 的圖形，只可能是下列何者之一？為什麼？



庚、長方形的長與寬分別是 a 與 $b (a > b)$ ，如圖示，設圖形中的四個小三角形分別為 S_1, S_2, S_3, S_4 且面積滿足 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ ，試求 S_4 的面積？



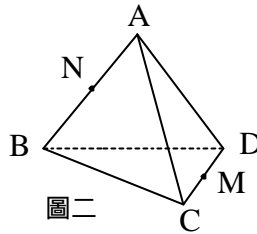
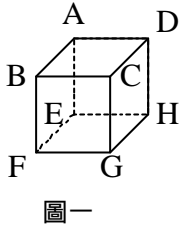
辛、設兩條帶子其寬分別為 a 與 $b (a > b > 0)$ ，互相交疊(如圖)，設其交角為



$\alpha, (0 < \alpha < 90^\circ)$ ，試求重疊部分的面積？
(試以 a, b 及 α 表出)

壬、(1)正立方體(如圖一)ABCD-EFGH，試求 \overline{ACF} 。

(2)每一面皆為正三角形所構成的立體圖形 A-BCD，稱為正四面體，(如圖二)，設 M, N 分別為 \overline{CD} 與 \overline{AB} 中點，且此四面體的每一邊長皆為 a ，試求 \overline{MN} 為何？



癸、對於平面上點 (x, y) ， x, y 皆為非負整數，按如下規定進行編號。其中 $F(x, y)$ 表示點 (x, y) 的編號，

$$F(0,0) = 0, F(x+1, 0) = F(0, x) + 1, (x = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

$$F(x, y+1) = F(x+1, y) + 1, (x = 0, 1, 2, \dots; y = 0, 1, 2, \dots).$$

請回答下列各題：

(1) 填空

$$F(\quad, \quad) = 1, F(\quad, \quad) = 2, F(\quad, \quad) = 3, F(\quad, \quad) = 4, F(\quad, \quad) = 5$$

$$F(\quad, \quad) = 6, F(\quad, \quad) = 9, F(\quad, \quad) = 10, F(\quad, \quad) = 11, F(\quad, \quad) = 12$$

(2) $F(x, 0)$

(3) $F(x, y)$

(4) 求滿足 $F(\quad, \quad) = 1998$ 的點 (x, y)