北一女中 87 學年度數學競試(高一組)參考解答

甲、(1)**證明：當** n = 1 **時，** 1 < 2 **顯然成立**

當 n > 1 **時，** $n(n-1)<n^2$

故 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

所以 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+......+\frac{1}{n^2}<1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+......+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2$

(2) $\because 1+\frac{1}{2^2}+......+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+......+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$

$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+......+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$

$=\frac{61}{36}-\frac{1}{n}<\frac{61}{36}$

乙、<u>3842</u>

$\because (4+\sqrt{15})^4=(16+8\sqrt{15})^2$

又 $(16+8\sqrt{15})^2+(16-8\sqrt{15})^2=2(961+960)=3842$

但 $16-8\sqrt{15}=\frac{1}{16+8\sqrt{15}}<\frac{1}{16+24}=\frac{1}{40}$

故 $(16-8\sqrt{15})^2<\frac{1}{1600}<\frac{1}{2}$ **即** $(4+\sqrt{15})^4$ **最接近** 3842

丙、 $1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}$

又 $10n<\frac{n(n+1)}{2}<11n$ **故** $10<\frac{n+1}{2}<11$ **即** $20<n+1<22\Rightarrow n=20$

丁、 $1+2+.......+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(1) $\frac{n(n+1)}{2}+1\le 20138\le\frac{n(n+1)}{2}+n$

$\Rightarrow 40266\approx n^2; n=200$ 20100<20138<20300 **又** 20138=20100+a $\Rightarrow a=38$

(2) $\frac{n(n+1)}{2}-n\le 20051\le\frac{n(n+1)}{2}-1$ **同法得** $n=200$ **且** $20051=20100-b\Rightarrow b=49$

<u>$Ans: a=38, b=49$</u>

戊、$\underline{\sqrt{2}}$

解：$f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x......(1)$

又$f(\frac{1}{x})+2f(x)=3\cdot\frac{1}{x}......(2)$

$(2)\times 2-(1)\Rightarrow 3f(x)=3(\frac{2}{x}-x)$

令 $f(x)=0$得$\frac{2}{x}-x=0\Rightarrow x=\sqrt{2}$(負不合)

即$f(x)=\frac{2}{x}-x$

$\mathrm{A}ns: x=\sqrt{2}$

己、(D)

解：(A)中拋物線開口朝上，$a>0$，但直線向右向下，$a<0$，故不合。

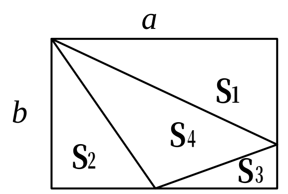
(B)拋物線顯示$b=0$不合。

(C)拋物線顯示$a<0, b>0$ ，但直線顯示$a>0, b<0$ ，故不合。

(D)拋物線中$a<0, b>0$ ，直線中$a<0, b>0$

且交於x 軸上一點$(-\frac{b}{a},0)$，故僅(D)有可能。

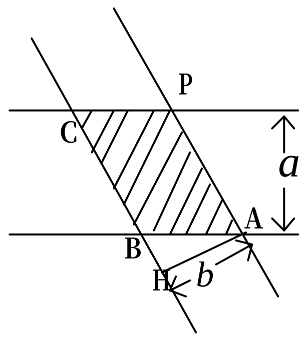
庚、$\underline{\frac{5}{18}ab}$



解：$S_1=S_2=S_3+S_4=\frac{ab}{3}$ $S_3=\frac{1}{2}(b-\frac{2b}{3})(a-\frac{2a}{3})=\frac{1}{18}ab$

故$S_4=\frac{ab}{3}-\frac{1}{18}ab=\frac{5}{18}ab$

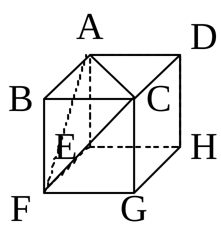
辛、作$\overline{AH}\perp\overleftrightarrow{CB}$



ΔAHB中，$\angle B=a$，$\overline{\mathrm{AB}}=b$，故$\overline{AB}=b\cdot\csc a$

平行四邊形 $ABCD$面積$=$底$\times$高$=(a)(b\cdot\csc a)=ab\cdot\csc a$

壬、(1)$\angle ACF=60°$



$\because \overline{AC}=\overline{CF}=\overline{AF}=\sqrt{2}\times$(邊長)

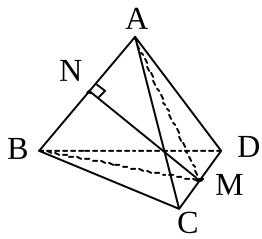
故ΔAFC為正Δ

(2) $\overline{MN}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\overline{AM}\perp\overline{CD}\Rightarrow\overline{AM}=$ **正三角形的高** $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (**同理可得**)　　　$\because \Delta ABN$**表等腰**Δ; N**為**$\overline{AB}$**中點**

故 $\overline{MN}\perp\overline{AB}$ ；$\overline{AN}=\dfrac{1}{2}a$　**即** $\overline{MN}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AN}^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$



癸、(1) $1=0+1=F(0,0)+1=F(1,0)$　　$2=1+1=F(1,0)+1=F(0,1)$

$3=2+1=F(0,1)+1=F(2,0)$　　$4=3+1=F(2,0)+1=F(0,2)$

$5=4+1=F(1,1)+1=F(0,2)$　　$6=5+1=F(0,2)+1=F(3,0)$

$7=6+1=F(3,0)+1=F(2,1)$　　$8=7+1=F(2,1)+1=F(1,2)$

$9=8+1=F(1,2)+1=F(0,3)$　　$10=9+1=F(0,3)+1=F(4,0)$

$11=10+1=F(4,0)+1=F(3,1)$　　$12=11+1=F(3,1)+1=F(2,2)$

(2) $F(x,0)=F(0,x-1)+1=F(x-1,0)+x=x+(x-1)+(x-2)+\ldots\ldots=\dfrac{x(x+1)}{2}$

(3) $F(x,y)=F(x+y,0)+y=\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y$

(4) $\dfrac{x(x+1)}{2}<1998<\dfrac{(x+1)(x+2)}{2}\Rightarrow x=62$

又 $F(6,2,0)=1953$......**根據**(2)

1998-1953=45 **且** 62-45=17 **故** $F(17,45)=1998$