

台北市立第一女子高級中學九十五學年度上學期第二次段考高三數學科試題卷(理)

一、單選題(每題 5 分)

1. 設拋物線 $x^2 = y$ 上 P, Q 兩點，將坐標軸平移後， P, Q 之新坐標為 $P(4,3), Q(-1,8)$ ，則對原坐標系而言，新原點 O' 之坐標為何？

- (A) (2, -1) (B) (-2, 1) (C) (-3, 2) (D) (-2, 3) (E) (-1, 1)

2. 方程式 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ 的圖形是

- (A) 橢圓 (B) 雙曲線 (C) 拋物線 (D) 兩平行直線 (E) 兩相交直線

3. 如圖，已知一個橢圓以 F 為焦點， O 為中心， P 為頂點，

試判斷 A, B, C, D, E 中的哪一個點也在此橢圓上？

- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

• E • D • O • F • P

4. 已知一個拋物線以原點 $(0,0)$ 為頂點，且通過 $(2,2), (2,-2)$ 兩點，則此拋物線的焦點座標為何？

- (A) $(0.5, 0)$ (B) $(1, 0)$ (C) $(1.5, 0)$ (D) $(2, 0)$ (E) $(4, 0)$

二、多重選擇題(每題 5 分)

1. 設 $a, b \in R$ ，則二次方程式 $ax^2 + by^2 = 1$ 所表示的圖形可能為哪些？

- (A) 相交二直線 (B) 圓 (C) 拋物線 (D) 橢圓 (E) 雙曲線

2. 考慮座標平面上所有滿足 $\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = 10$ 的點 (x,y) 所成的圖形，則下列敘述哪些是正確的？

- (A) 此圖為一個橢圓 (B) 此圖為一個雙曲線 (C) 此圖的中心在 $(1,1)$
(D) 此圖對稱於 $x=1$ (E) 此圖有一個頂點 $(1,-4)$

3. 在座標平面上，以 $(0,2), (4,2)$ 為焦點，且通過 $(4,5)$ 之雙曲線，試問此雙曲線也會通過下列哪些點？

- (A) $(2, 2)$ (B) $(0, 5)$ (C) $(4, -1)$ (D) $(0, -1)$ (E) $(4, 2)$

三、填充題(每格 5 分)

1. 平移坐標軸，以 $(-2, 3)$ 為新原點時，直線 $L: 3x + 2y = 6$ 對新坐標系之新方程式為 _____ (1)

2. 平移坐標軸，以 (h, k) 為新原點時， $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ 可以消去常數項，則 $h - k =$ _____ (2)

3. 繞原點轉軸，旋轉一個正銳角 θ 後，曲線 $\Gamma: 8x^2 + 4xy + 5y^2 = 36$ 的新方程式為 $ax'^2 + cy'^2 = 36$ ，則：
(1) $(\cos\theta, \sin\theta) =$ _____ (3) (2) 序對 $(a, c) =$ _____ (4)

4. 將橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的圖形沿著直線 $2y=x$ 的方向平移 (m,n) 後，與直線 $x+y=1$ 相切，則數對 $(m,n) =$ _____ (5)

5. 設 $x, y \in R$ 且 $3x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 = 2$ ，設 $x^2 + y^2$ 之最大值為 p ，最小值為 q ，則 $p + q =$ _____ (6)

6. 在座標平面上，設直線 $L: x=y+2$ 與拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 相交於 P, Q 兩點，若 F 表拋物線 Γ 的焦點，則 $\overline{PF} + \overline{QF} =$ _____ (7)

7. 設 P 為橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上的一點且位於上半平面，若 F_1, F_2 為此橢圓的兩個焦點，而且則 $\angle F_1PF_2$ 為直角，則 P 點的 y 座標為 _____ (8)

8. 設 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 上的一點且位於第一象限，若 F_1, F_2 為此雙曲線的兩個焦點，而且 $\overline{PF_1} : \overline{PF_2} = 1:2$ ，則 $\overline{PF_1F_2}$ 為的周長為 _____ (9)

9. 平面上有一橢圓，已知其焦點為 $(6,2), (2,5)$ ，且 x 軸為其切線，則此橢圓的長軸長度為 _____ (10)

10. 若已知方程式 $x^2 + 2y^2 + 2x + 4y + k = 0$ 的圖形為橢圓，則 k 的範圍為 _____ (11)

一、單選題(每題 5 分)

1. B	2. D	3. B	4. A
------	------	------	------

二、多重選擇題(每題 5 分)

1. BDE	2. ACDE	3. BCD
--------	---------	--------

三、填充題(每格 5 分)

(1) $3x + 2y = 6$	(2) 2	(3) $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$
(4) (9,4)	(5) (4,2) or $(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3})$	(6) 12
(7) 10	(8) $\frac{9}{4}$	(9) 34
(10) $\sqrt{65}$	(11) $k < 3$	

四、計算題：標準化(4分)，找出中心(1分)、頂點(2分)，漸近線(2分)，並作圖(1分)

(1)先平移後旋轉，設 S 平移 (h, k) 得 S' ，其中 $\begin{cases} k-2=0 \\ h+1=0 \end{cases}$ 解之得 $h=-1, k=2$ ，常數項為 $f(-1, 2)=-4$ ，所

以對於 S' 的新方程式為 $x'y' = 4$

(2)將 S' 旋轉 $\theta = 45^\circ$ 得 S'' ，有 $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，其中 $\begin{cases} A'' + C'' = 0 \\ A'' - C'' = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \end{cases}$ 解之得 $A'' = \frac{1}{2}, C'' = -\frac{1}{2}$ ，

所以對於 S' 的新方程式為 $\frac{1}{2}x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 = 4$ ，即 $\frac{x''^2}{8} - \frac{y''^2}{8} = 1$

(3)中心為 $(-1, 2)$ ，頂點為 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)'' \rightarrow \pm(2, 2)' \rightarrow (1, 4), (-3, 0)$

漸近線為 $x = -1$ 與 $y = 2$

