台北市立第一女子高級中學95學年度第二學期第一次期中考高三理科數學題目卷

一、多重選擇題(每題 10 分)

1. 已知 A、B、C 均為二階方陣，則下列選項何者正確？

 (A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$

 (B) 若 $\boldsymbol{A}$ 矩陣不為零矩陣，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，則 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

 (C) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_2$，則 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_2$ 或 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}_2$

 (D) $(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\boldsymbol{T}}$

 (E) 若 $\det(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{k}\neq 0$，　則 $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\dfrac{1}{\boldsymbol{k}}$

2. $\boldsymbol{A}(\sqrt{3},-1)$, $\boldsymbol{B}(2,\sqrt{5})$, $\boldsymbol{C}(-3,4)$，試問△$\boldsymbol{ABC}$ 經過下列哪一個變換後，其面積會變大？

 (A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}+3\\\boldsymbol{y}+5\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}$

 (D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}\to\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}$

3. n 是正整數，座標平面上兩個圖形 $\dfrac{|\boldsymbol{x}|}{\boldsymbol{n}}+|\boldsymbol{y}|\leq 1$ 和 $|\boldsymbol{x}|+\dfrac{|\boldsymbol{y}|}{\boldsymbol{n}}\leq 1$ 共同部分的區域面積與周長分別為 $\boldsymbol{A}_n$ 與 $\boldsymbol{B}_n$，則下列選項何者正確？

 (A) $\boldsymbol{A}_n$ 為遞增數列　(B) $\boldsymbol{B}_n$ 為遞減數列　(C) $2\leq\boldsymbol{A}_n<4$

 (D) $\boldsymbol{B}_n\geq 4\sqrt{2}$　(E) $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n=4$

4. 下列敘述何者正確？

 (A) $\{\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{b}_n\}$ 為收斂數列 $\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{a}_n\}$、$\{\boldsymbol{b}_n\}$ 為收斂數列

 (B) $\lim\limits_{n\to\infty}|\boldsymbol{a}_n|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n=0$

 (C) 若數列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$、$\{\boldsymbol{b}_n\}$、$\{\boldsymbol{c}_n\}$ 滿足 $\boldsymbol{a}_n\leq\boldsymbol{b}_n\leq\boldsymbol{c}_n$ 且 $\{\boldsymbol{a}_n\}$、$\{\boldsymbol{c}_n\}$ 均收斂，則 $\{\boldsymbol{b}_n\}$ 必為收斂數列

 (D) 若 $\lim\limits_{x\to a}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 存在，則 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 為連續函數

 (E) 對任意函數 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}$，若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})<0$，則在 a, b 之間有一實數 c，滿足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})=0$

二、填充題(每格 5 分)

1. 試求下列極限值：(若無極限請回答”不存在”)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n-2})=$ ____(A)____

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=$ ____(B)____

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x[\dfrac{1}{x}]=$ ____(C)____

2. 等比數列 $\{a_n\}$，其前 n 項和為 S_n，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{5^n}=\dfrac{1}{2}$，試求此數列第 3 項 $a_3=$ ____(D)____

3. 一多項函數 $f(x)$，$\deg(f(x))\le 4$，且領導係數為 1，

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=16$，$\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{f(x)}{x+a}=-16$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，則 $a=$ ____(E)____

4. 設 $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}$， $P=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，若 $A=PBP^{-1}$，試求：

(1) 矩陣 $B=$ ____(F)____

(2)若 $A^{10}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$ ____(G)____(以指數形式表示即可，不需展開)

5. 一橢圓 Γ: $x^2+3y^2=4$ 經一旋轉矩陣 R 旋轉 $\theta(0^\circ<\theta<90^\circ)$ 後，得到一新的橢圓 Γ'，已知 Γ 與 Γ' 兩橢圓交於 A、B、C、D 四點，且 $A(\sqrt{2},\sqrt{\dfrac{2}{3}})$，試求此矩陣 $R=$ ____(H)____

三、計算題(每題 10 分)

1. 我們定義：$\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$，以及 $\vec{t}=(t_1,t_2,t_3)$, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$，

$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$，若 $\overline{OP}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$，則以 $(a,b,c)_S$ 表示 $\overline{OP}$；若 $\overline{OP}=a'\vec{t}+b'\vec{u}+c'\vec{v}$，

也以 $(a',b',c')_{S'}$ 表示 $\overline{OP}$；已知三向量 $\overline{OA}=(-2,20,17)_S=(3,0,2)_{S'}$，

$\overline{OB}=(0,5,4)_S=(1,1,1)_{S'}$，$\overline{OC}=(-1,10,9)_S=(1,2,3)_{S'}$，

(1)試列出 t_1,u_1,v_1 的聯立方程組、t_2,u_2,v_2 的聯立方程組、t_3,u_3,v_3 的聯立方程組(3 分)

(2)試將(1)中的三個聯立方程組以一個矩陣方程式：$AX=B$ 表示出來，並且運用矩陣的運算求出 $\vec{t},\vec{u},\vec{v}$ (7 分)

2. 使用圓球和球袋作機率實驗。球只有黑白兩色，袋中裝有兩顆球，因此只有三種可能情況：雙白球、一白球一黑球或雙黑球。對這袋球做如下操作：自袋中隨機移走一球後，再隨機移入一顆白球或黑球（移入白球或黑球的機率相等）。每次操作可能會改變袋中球的狀態。若從雙白球開始，經過 n 次操作後，回到雙白球的機率為 a_n，試求：

(1) a_4 的值 (3 分)　　(2) a_k 與 a_{k+1} 的關係 (2 分)

(3) 請問 $\{a_n\}$ 是否收斂，若收斂則證明之並求極限值。(5 分)

台北市立第一女子高級中學95學年度第二學期第一次期中考

高三理科數學答案卷

高三____班 座號___ 姓名____________

一、多重選擇題(每題 10 分)

1. *DE*	2. *BD*	3. *ACDE*	4. *B*

二、填充題(每格 5 分)

(A) 不存在	(B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$	(C) 1	(D) 50
(E) 2	(F) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	(G) $2\cdot 3^{10}$	(H) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

三、計算題(每題 10 分)

1.(1) $\begin{cases} 3t_1 + \quad 2v_1 = -2 \\ t_1 + u_1 + v_1 = 0 \\ t_1 + 2u_1 + 3v_1 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3t_2 + \quad 2v_2 = 20 \\ t_2 + u_2 + v_2 = 5 \\ t_2 + 2u_2 + 3v_2 = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} 3t_3 + \quad 2v_3 = 17 \\ t_3 + u_3 + v_3 = 4 \\ t_3 + 2u_3 + 3v_3 = 9 \end{cases}$ (3 分)

(2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 20 & 17 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (3 分)

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 20 & 17 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 10 & 9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$ $\Rightarrow \vec{t} = (0,4,3)$, $\vec{u} = (1,-3,-3)$, $\vec{v} = (-1,4,4)$

(1 分) (3 分)

2.(1) $a_4 = \frac{9}{32}$ (3 分)

(2) $a_{k+1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}a_k$ (2 分)

(3)證明遞減有界由實數的完備性

得 a_n 收斂；令 $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

或由

$a_{k+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(a_k - \frac{1}{4})$

得 $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times (\frac{1}{2})^{n-1}$

再求得 $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \frac{1}{4}$ (5 分)