台北市立第一女子中學 95 學年第二學期高三數學(乙)第一次期中考試卷

✧試題總分 120 分，標記*的題目是有點難度，同學可自由選作，不必勉強!

✧[符號說明](1) $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (2) A^{-1}表可逆矩陣A的反矩陣

(3) $O_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ (4) det(A)表方陣A的行列式值

一、多重選擇題 (每題 15 分，計 30 分)

1.設A表每一位置的元素都是實數，且滿足$A^2+A+I_2=O_2$的 2 階方陣，
試問下列的敘述何者為真?

(1) $A^3=I_2$ (2) det(A)=1 (3) $\begin{bmatrix}\cos 120^\circ & -\sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ\end{bmatrix}$符合上述方陣A的定義

(4)A^{-1}未必存在 (5)若A^{-1}存在，則$A^{-1}=-A$。

2.設 2 階方陣A所對應的的平面變換T_A將點P(1,-1)及Q(0,-1)依次
變換到點P′(0,-1)及Q′(-2,-1)。其實T_A是先作x方向的推移T_B，
再作伸縮T_C的平面變換，試問下列的敘述何者為真?

(1)T_A將點R(1,0)變換到點R′(2,1) (2)推移變換T_B的矩陣表示$B=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$

(3)伸縮變換T_C的矩陣表示$C=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ (4)直線L:x+2y=0 經T_A變換到L本身

(5)ΔABC經T_A變換到ΔA′B′C′，則ΔA′B′C′與ΔABC面積相等。

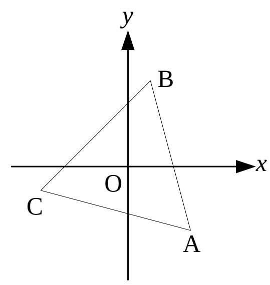
二、填充題 (每格 6 分，計 78 分)

1.設$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，2 階方陣X、Y滿足條件：2X+4Y=5A，$4X-2Y=5I_2$，則

(1)X= (A)______ 。 (2)XY= (B)______ 。 (3)設$X^{10}=aA+bI_2$，試求數對(a,b)= (C)______ 。

2.設$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，AX=B，試求 2 階方陣X= (D)______ 。

3.設可逆矩陣$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-2&1\end{bmatrix}$的反矩陣$A^{-1}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}$，則$x_{23}$= (E)______ 。



4.如圖，坐標平面上，正三角形ΔABC的中心為O(0,0)，一頂點A(2,-2)，
另一頂點B落在第一象限內，試求頂點B的坐標: (F)______ 。

5.坐標平面上，雙曲線Γ: $x^2-y^2=1$ 繞原點O(逆時針)旋轉 45°
得另一雙曲線Γ′，試求Γ′的方程式: (G)______ 。

6.設$A(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$。若$A^5(\theta)=I_2$，<u>$0<\theta<\pi$</u>，則其中滿足條件的最大角θ= (H)______ 。

※設 $A=\begin{bmatrix}0&1\\3&2\end{bmatrix}$，試回答下列第 7、8 題兩題組(I)~(M)：

7.(1)試求實數a、b，使得$A^2+aA+bI_2=O_2$，則數對(a,b)= (I)______ 。

(2)承(1)，試求$A^5-A^4-4A^3-4A^2-A+I_2$= (J)______ 。

8. (1)若二元一次方程組：$A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$除了(0,0)之外還有其他解，則實數k= (K)______ 。

* (2)試找尋可逆矩陣P，使得$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}$ (α>β)，則P= (L)______ 。

(其實滿足條件的 P 並非唯一，只要找出其中一個即可!)

* (3)承(2)，試求A^n= (M)______ (n∈N) 。

台北市立第一女子中學 96 學年第二學期 高三數學(乙)第一次期中考試答案卷

班級：高三_____班　　座號：_____　　姓名：

❁試題總分 120 分，得分超過 100 分，以 100 分計。

(一)多重選擇題 (每題 15 分，共計 30 分)

每題有 5 個選項，各自獨立計分。對於每一選項，若選擇正確，得 3 分；若選擇錯誤，得 0 分，但不倒扣。

1. (1) (2) (3) (4) (5)
□ □ □ □ □

2. (1) (2) (3) (4) (5)
□ □ □ □ □

(二)填充題 (每格 6 分，共計 78 分)

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
(F)	(G)	(H)	(I)	(J)
(K)	(L)	(M)		

(三)問答題(計 12 分)

※虛擬的情境裡，由妳當主角!

某堂數學課討論的主題是滿足條件“$A^2=I_2$”的 2 階方陣A，在有點冷的對話氛圍裡，小綠同學大膽地提出兩個猜想，並嘗試論證如下：

1.若$A^2=I_2$，則$A=I_2$或$A=-I_2$

[證]　$A^2=I_2$　①

$\Rightarrow A^2-I_2=O_2$　②

$\Rightarrow (A-I_2)(A+I_2)=O_2$　③

$\Rightarrow A-I_2=O_2$或$A+I_2=O_2$　④

$\Rightarrow A=I_2$或$A=-I_2$　⑤

2.若$A^2=I_2$，$B^2=I_2$，則$(AB)^2=I_2$

[證]　$A^2=I_2$，$B^2=I_2$　①

$\Rightarrow A^2B^2=I_2I_2=I_2$　②

$\Rightarrow (AA)(BB)=I_2$　③

$\Rightarrow A(AB)B=I_2$　④

$\Rightarrow A(BA)B=I_2$　⑤

$\Rightarrow (AB)^2=(AB)(AB)=I_2$　⑥

請妳針對小綠的論證，指出過程中哪一步驟的推衍錯誤。或許反例更能說服小綠相信自己的猜想並不正確，請妳針對小綠的猜想舉出反例。

1.針對「若$A^2=I_2$，則$A=I_2$或$A=-I_2$」的論證

(1)錯誤：

________________________________。　(3 分)

(2)反例：

__________。　(3 分)

2.針對「若$A^2=I_2$，$B^2=I_2$，則$(AB)^2=I_2$」的論證

(1)錯誤：

________________________________。　(3 分)

(2)反例：

__________。　(3 分)

台北市立第一女子中學 96 學年第二學期高三數學(乙)第一次期中考試解答

❁試題總分 120 分，得分超過 100 分，以 100 分計。

(一)多重選擇題 (每題 15 分，共計 30 分)

每題有 5 個選項，各自獨立計分。對於每一選項，若選擇正確，得 3 分；若選擇錯誤，得 0 分，但不倒扣。

1.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
■	■	■	□	□

2.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
□	□	■	■	□

(二)填充題 (每格 6 分，共計 78 分)

(A)$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}$	(B)$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5&7\\7&5\end{bmatrix}$	(C)$(\frac{1023}{2},1)$	(D)$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&2\\2&-1\end{bmatrix}$	(E)$-\frac{1}{3}$
(F)$(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$	(G)2xy=1	(H)$\frac{4\pi}{5}$	(I)(-2,-3)	(J)$\begin{bmatrix}4&4\\12&12\end{bmatrix}$
(K) 3 或-1	(L)$\begin{bmatrix}a&b\\3a&-b\end{bmatrix}$,ab≠0	(M)$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3^n+3(-1)^n & 3^n-(-1)^n\\3^{n+1}-3(-1)^n & 3^{n+1}+(-1)^n\end{bmatrix}$		

答對一個得 3 分　　答對一個此類型的矩陣即可

(三)問答題(計 12 分)

1.(1) $AB=O_2$並不保證$A=O_2$或$B=O_2$,所以③式⇒④式錯誤　(3 分)

(2)其實鏡射矩陣即為一例，參考答案: $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $A^2=I_2$，但$A\neq I_2$, $A\neq -I_2$　(3 分)

2.(1)AB=BA 並不保證成立,所以④式⇒⑤式錯誤　(3 分)

(2)其實鏡射矩陣即為一例，參考答案: $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $A^2=I_2$, $B^2=I_2$，但

$AB=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$, $(AB)^2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\neq I_2$　(3 分)