台北區公立高中九十四學年度第二學期指定考科數學甲模擬考

第壹部分：選擇題（占78分）

一、單一選擇題（15%）

說明：第1至第3題，每題選出一個最適當的選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得5分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣$\frac{5}{3}$分，倒扣至本大題之實得分數為零為止，未答者，不給分亦不扣分。

1. 已知m，n，ℓ皆爲整數，若α，β是多項方程式$6x^4+mx^3+nx^2+\ell x+2=0$的兩個正有理根，且$\alpha+\beta=\frac{3}{2}$，則該方程式的另外兩根之積爲何？

(1) $\frac{2}{3}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) 1

2. 正三角形ABC與正方形$ABPQ$，分別在兩個相互垂直的平面上，則$\cos\angle CAP=$？

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　(4) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

3. 過去經驗顯示，中學生準時到校上課的同學有80%第二天仍會準時到校，而遲到或缺席的同學有60%第二天仍然遲到或缺席，若某班有40位同學，已知週一有35位同學準時到校，在週二及週三均不放假的情況下，預估當週週三將有幾位同學缺席或遲到？

(1) 8　(2) 10　(3) 12　(4) 14

二、多重選擇題（48%）

說明：第4至第9題，每題各有4個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題8分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得2分；每答錯一個選項，倒扣2分，完全答對得8分，整題未作答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣2分，倒扣至本大題之實得分數為零為止。

4. 設三次函數$f(t)=6t^3-29t^2-6t+5$，則下列敘述哪些是正確的？

(1)若$x\in R$，則方程式$f(3^x)=0$有三個實根

(2)若$x\in R$，則方程式$f(\log_2 x)=0$有三個實根

(3)若$0\le x<2\pi$，則方程式$f(\sin x)=0$有三個實根

(4)若$0\le x<\pi$，則方程式$f(\tan x)=0$有三個實根

5. 設 $<z_n>$ 為複數等比數列且 $z_1=1$，$z_2=a+bi$，$z_3=b+ai$，…其中 a，$b\in R$ 且 $a>0$，則下列哪些敘述是正確的？

(1) $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $|z_{2006}|=1$

(3) $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\cdots\cdot z_6=-1$

(4)若 $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n=0$，則 n 之最小值 12

6. 已知 $ABCD$ 為圓 Γ 的內接四邊形。若圓 Γ 的半徑為 $\dfrac{1}{2}$，$\angle ABC=90°$，$\angle BCA=65°$，$\angle DAC=50°$，則下列敘述哪些是正確的？（符號 $\overline{AB}$ 表示「線段 AB 的長度」）

(1) $\overline{AB}=\sin 65°$

(2) $\overline{BD}=\sin 75°$

(3) $\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{BC}\times\overline{AD}=\overline{BD}$

(4) $2\,\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{CD}$

7. 已知平面 E：$x-4y+2z=4$ 與直線 L：$\begin{cases}ax+by+cz=2c\\2x+3y+z=2\end{cases}$ 其中 $abc\neq 0$，則下列敘述哪些是正確的？

(1)直線 L 與平面 E 有可能不相交

(2)若 $a:b:c=10:(-3):(-11)$，則 $L\,//\,E$

(3)若 $10a-3b-11c=0$，則直線 $L\subset E$

(4)若 $\begin{vmatrix}b&c\\3&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}c&a\\1&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a&b\\2&3\end{vmatrix}=1:(-4):2$，則 L 與 E 恰有一交點 $(0,0,2)$

8. 設 x，$y>0$，且 $x+2y=3$，則下列敘述哪些是正確的？

(1)當 $(x,y)=(1,1)$ 時，$(x-1)^2+y^2$ 有最小值

(2)當 $(x,y)=(1,1)$ 時，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}$ 有最小值

(3)當 $(x,y)=(2,\dfrac{1}{2})$ 時，2^x+4^y 有最小值

(4)當 $(x,y)=(2,\dfrac{1}{2})$ 時，$\log_2 x+\log_4 y$ 有最大值

9. 某次某班數學段考後，發現多位同學成績不及格，爲使全班皆大歡喜，老師決定用線性函數：$\underline{Y=aX+b}$來調整分數，其中Y爲調整後的分數，X爲調整前的分數；老師採取的方式如下：將0分者調整成60分，而100分者仍要維持爲100分。則下列敘述哪些是正確的？

(1)若調整前有兩人的分數相差爲40分，則調整後兩人的分數相差爲10分

(2)全班調整後分數的算術平均數必大於調整前分數的算術平均數

(3)全班調整後分數的變異係數必小於調整前分數的變異係數

(4)若r_{xy}代表調整前分數和調整後分數的相關係數，則r_{xy}介於0.3與0.5之間

三、選填題（15%）

說明：A、B、C各題為選填題，請在答案卡的「解答欄」之列號（⑩-⑮）標示答案。每一題完全答對得5分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}=(2,-7)$，$\overrightarrow{AC}=(10,1)$，若$\overline{AD}$爲$\overline{BC}$邊之高，$H$爲$\triangle ABC$之垂心，則兩線段$\overline{AH}$與$\overline{AD}$長度之乘積爲__⑩⑪__。

B. 空間中點$P(5,1,-4)$到圓$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ x+y+z=2 \end{cases}$的切線段長爲__⑫⑬__。

C. 從$\{-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$中任取三個相異整數a，b，c形成一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$，已知$x=1$是此方程式之根的條件下，則$x=3$也是此方程式之根的機率爲$\dfrac{1}{⑭⑮}$。

第貳部分：非選擇題（占22分）

說明：本大題為計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二），與子題號（1、2、3⋯）同時必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、(1)求$\dfrac{11\times12\times13\times\cdots\times20}{1\times3\times5\times\cdots\times19}$之值。（4分）

(2)試證：P^{2n}_{n}恆為2^{n}的倍數，其中$P^{n}_{m}=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，$n$、$m$均為正整數。（6分）

二、設x，y均為實數，考慮方程式$5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$的圖形。

(1)求其中心坐標。（2分）

(2)設A為其短軸上的頂點，F_1，F_2為其兩個焦點，求$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}$的值。（5分）

(3)求$x+y$的最大值。（5分）

台北區公立高中九十四學年度第二學期指定考科數學甲模擬考詳解

第一部份：選擇題

一、單一選擇題

1、(1)　　2、(3)　　3、(3)

二、多重選擇題

4、(2)(4)　　5、(1)(2)(4)　　6、(1)(2)(3)(4)　　7、(3)(4)
8、(2)(4)　　9、(2)(3)

三、選填題

A、13　　B、$\sqrt{26}$　　C、$\frac{1}{12}$

第二部份：非選擇題

一、參考答案：(1) 1024　(2)見解析

試題解析：(1)因 $\dfrac{11\times12\times13\times\cdots\times20}{1\times3\times5\times\cdots\times19}=\dfrac{\frac{20!}{10!}}{\frac{20!}{2\times4\times6\times\cdots\times20}}=\dfrac{\frac{20!}{10!}}{\frac{20!}{2^{10}\times10!}}=2^{10}=1024$（4分）

(2)《解法一》：使用數學歸納法

①當 $n=1$ 時，$2^1=2$，$P_1^2=2$，$2\mid2$，成立（1分）

②設 $n=k$ 時成立，亦即設 2^k 整除 P_k^{2k}，$\forall k\in N$

令 $P_k^{2k}=2^k\cdot t$，$t\in N$，則

$$P_{k+1}^{2(k+1)}=\frac{[2(k+1)]!}{(2k+2-k-1)!}=\frac{(2k)!\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)}{k!\cdot(k+1)}$$
$$=2^k\cdot t\cdot2\cdot(2k+1)$$
$$=2^{k+1}\cdot t\cdot(2k+1)$$

$\Rightarrow$ 2^{k+1} 整除 $P_{k+1}^{2(k+1)}$ $\Rightarrow$ $n=k+1$ 也成立

故 P_n^{2n} 恆爲 2^n 的倍數，$\forall n\in N$（5分）

《解法二》

因 $\dfrac{P_n^{2n}}{2^n}=\dfrac{(1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot2n)}{2^n\cdot(1\cdot2\cdot\cdots\cdot n)}$

$=\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot2n}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}$（2分）$=1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)$（4分）

故 P_n^{2n} 恆爲 2^n 的倍數，$\forall n\in N$

《解法三》

因 $\dfrac{P_n^{2n}}{2^n}=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=\dfrac{C_2^{2n}\cdot C_2^{2n-2}\cdot C_2^{2n-4}\cdot\cdots\cdot C_2^2}{n!}$ 可視爲 $2n$ 個不同物 2 個 2 個平均分成 n 堆的方法數，而其方法數必爲正整數

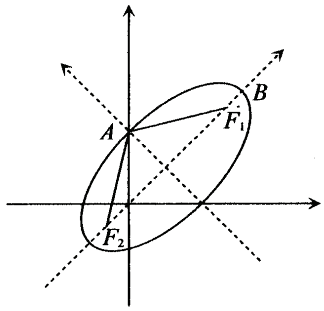
故 P_n^{2n} 恆爲 2^n 的倍數，$\forall n\in N$（6分）

二、參考答案：(1) $(1, 1)$　(2) -2　(3) $2\sqrt{2}+2$

試題解析：(1)設中心爲 (h, k)

$$\begin{cases}10h-6k-4=0\\-6h+10k-4=0\end{cases}，h=1，k=1$$

中心爲 $(1, 1)$（2分）



(2)平移後爲 $5x'^2-6x'y'+5y'^2-8=0$

$$\begin{cases}A'+C'=10\\A'-C'=-6\end{cases}，A'=2，C'=8$$

旋轉後化成標準式爲 $\dfrac{x''^2}{4}+\dfrac{y''^2}{1}=1$

$a^2=4，b^2=1 \Rightarrow c^2=3$

$\overline{AF_1}=\overline{AF_2}=2，\overline{F_1F_2}=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=\overline{AF_1}\cdot\overline{AF_2}\cdot\cos\angle F_1AF_2=\dfrac{\overline{AF_1}^2+\overline{AF_2}^2-\overline{F_1F_2}^2}{2}=-2$（5分）

(3) $\cot 2\theta=0，\theta=\dfrac{\pi}{4}$

橢圓長軸頂點 B 爲 $(2, 0)_{S''}=(\sqrt{2}, \sqrt{2})_{S'}=(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)_S$

當 $(x, y)=(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$ 時

$x+y$ 有最大値 $\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}+2$（5分）